
PROPERTY OF
University of Michigan Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS

PSYCHOLOGIE

DU NOMBRE

PSYCHOLOGIE
DU NOMBRE

ET

DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES
DE L'ARITHMÉTIQUE

La genèse des premières notions de l'Arithmétique;
Notions de Suite, de Nombre, de Somme et de Différence.
roduit et Quotient.

PAR

S. SANTERRE

AVEC UNE PRÉFACE

PAR

LE Dr PIERRE JANET
Professeur de Psychologie au Collège de France.

« Les mathématiques..... ne seraient-elles pas surtout un admirable langage, le plus parfait qu'on puisse rêver pour raconter l'expérience ».
A. DE LAPPARENT.

PARIS
OCTAVE DOIN, ÉDITEUR
8, PLACE DE L'ODÉON, 8
—
1907

PRÉFACE

Les lecteurs du bel ouvrage de M. Santerre sont sans doute bien surpris en voyant au début d'une étude sur les principes les plus élevés des mathématiques une introduction écrite par un simple psychologue. Je ne me dissimule pas mon incompétence : j'ai été très honoré et très touché quand M. Santerre m'a demandé quelques mots d'introduction pour son livre, mais je reste cependant un peu confus en présentant au public scientifique une œuvre qui s'écarte tellement de mes propres études. Si je me permets cependant cette hardiesse, c'est que cet ouvrage, tout mathématique qu'il soit et bien qu'écrit par un mathématicien de premier ordre, présente un caractère très original qui le distingue des autres travaux sur la science des nombres. Il se rattache étroitement aux études psychologiques par ses conceptions générales sur le caractère relatif et sur la valeur purement subjective des mathématiques, par la place qu'il leur donne parmi les autres études morales et en particulier parmi les études du langage, enfin par les principes auxquels il les rattache.

Si le sujet est mathématique, si les démonstrations ont la forme et la rigueur qu'on est habitué à leur trouver dans les traités de géométrie, l'esprit du livre est entièrement psychologique et le traité de M. Santerre doit avoir sa place dans la bibliothèque du psychologue comme dans celle du mathématicien. C'est ce caractère psychologique que je voudrais mettre en évidence en laissant à d'autres plus compétents l'appréciation et la discussion mathématiques.

I

La valeur des mathématiques, la portée des vérités qu'elles nous révèlent ont été très diversement comprises suivant les époques. Autrefois pour les pythagoriciens et les platoniciens l'étude des nombres était une véritable métaphysique ; elle nous révélait la connaissance de l'unité absolue, elle nous apprenait les relations mystérieuses qui unissent les choses entre elles et nous faisait pénétrer dans les principes mêmes de l'univers. Plus tard l'étude des propriétés numériques des choses semblait une étude physique nous révélant les caractères réels du monde extérieur : les lois qui régissent l'étendue devenaient les lois mêmes des objets matériels considérés comme identiques dans leur essence à cette étendue géométrique. Pour d'autres auteurs les mathématiques sont des sciences normatives, elles règlent toutes les autres recherches, parce qu'elles sont fondées sur une intuition mystérieuse qui leur a révélé plus qu'à toute autre science des vérités absolues.

La conception de la valeur des mathématiques qui se dégage de ce livre est tout autre et beaucoup plus modeste. Les propositions qu'enseignent ces sciences deviennent tout simplement des vérités psychologiques et rien de plus. Elles consistent dans l'expression précise et commode d'un certain nombre de faits qui existent évidemment dans l'esprit de l'homme et qui ont été de bonne heure accessibles à son observation interne.

Ces faits dépassent l'esprit individuel sans doute, car ils nous paraissent exister également chez les autres hommes. Nous constatons, par exemple, que la succession des paroles que nous prononçons donne naissance dans l'esprit de nos semblables à une succession de perceptions verbales rangées dans le même ordre. Mais il n'en est ainsi que dans des circonstances très simples et très normales, accessibles à

notre observation de tous les jours. Rien ne nous prouve d'une manière absolue qu'il en soit toujours ainsi, il ne s'agit là que d'une généralisation fondée sur l'observation la plus commune.

Est-il également vrai que ces notions mathématiques s'appliquent aux phénomènes du monde extérieur? S'il s'agit du monde vraiment extérieur, objectif, nous n'en savons absolument rien. Il n'y a aujourd'hui aucune raison pour donner aux mathématiques cette valeur transcendante qu'on leur attribuait autrefois. En réalité, les mathématiques s'appliquent tout simplement à notre représentation du monde, à des phénomènes fictifs que l'esprit humain a été appelé à construire pour s'expliquer ses propres perceptions. Cette représentation des choses qui a déjà été faite suivant des lois psychologiques se prête à l'application des mathématiques qui sont l'expression de ces mêmes lois.

Cette conception profondément idéaliste qui domine tout l'ouvrage de M. Santerre se trouve très clairement indiquée à propos de différents problèmes particuliers. On verra, par exemple, que la notion du temps, les jugements d'antériorité et postériorité jouent un rôle considérable dans la thèse de M. Santerre. Mais de quel temps s'agit-il? L'auteur démontre très clairement que ces idées d'antériorité et de postériorité n'ont de sens et ne sont relativement intelligibles que lorsqu'elles s'appliquent à des phénomènes de notre pensée. En dehors de ce temps psychologique il n'y a plus rien que du vague et de l'arbitraire et il est puéril d'essayer de se représenter un temps physique ou métaphysique qui existerait en dehors de nous. Concevoir l'antériorité et la postériorité réelles des phénomènes extérieurs indépendamment de l'antériorité et de la postériorité de nos propres perceptions est une pure chimère qui aboutirait vite à toutes sortes d'absurdités. La situation dans le temps que nous attribuons aux événements ne dépend que de la situation dans le temps psychologique de nos propres perceptions. Elle est seulement

réglée par les lois que nous attribuons à notre représentation scientifique du monde.

Il en est de même pour la notion également capitale de l'identité. On verra que M. Santerre l'étudie d'abord à propos de l'identité de deux événements psychologiques et qu'après cette étude préalable il passe à l'identité de deux objets. Il ne s'agit pas d'ailleurs de leur identité absolue, en soi, indépendamment de nous : il ne s'agit que de l'identité de leur représentation. Deux objets qui ne peuvent se distinguer l'un de l'autre que par la position qu'ils occupent dans l'espace sont dits des objets identiques, les mathématiques ne se préoccupent pas du tout de savoir si ils le sont en réalité, de savoir même si le mot identité aurait encore un sens en dehors de la distinction plus ou moins nette de nos perceptions.

Ce que nous venons de dire à propos de la succession dans le temps et de l'identité s'applique à toutes les propriétés des nombres et aux opérations que l'on peut faire sur eux. Ainsi la somme de deux nombres n'est plus l'attribut numérique du système total constitué par deux systèmes partiels de phénomènes, d'objets, d'êtres distincts les uns des autres et extérieurs à nous. Comme l'avaient déjà indiqué Helmholtz et Kronecker la somme de $A + B$ est simplement le dernier des B termes qui suivent A sans que cela nous indique le moins du monde un groupement réel des objets extérieurs.

Ainsi les mathématiques ont avant tout une valeur psychologique, ce ne sont pas des intuitions d'une réalité inaccessible, ce sont des observations empiriques que les hommes ont faites sur leur propre esprit et par là ces sciences se rapprochent des autres études psychologiques qu'elles ne dépassent en aucune façon.

II

Cette assimilation des mathématiques aux autres études psychologiques devient encore plus évidente, quand on voit

M. Santerre rapprocher sans cesse le nombre d'un fait essentiellement moral, le langage. Si l'on demandait à l'auteur de refaire après tant d'autres la classification des sciences et de donner une place aux mathématiques, il n'en ferait pas un groupe à part parmi les sciences intuitives et normatives, il les rangerait tout simplement à côté des études de linguistique et de grammaire. Cette idée que les mathématiques ne sont autre chose qu'un langage a déjà été entrevue par bien des philosophes ; on la devine dans le titre même de l'ouvrage de Condillac, « La langue des Calculs ». Mais personne ne l'a précisée d'une manière aussi complète et on peut dire que tout cet ouvrage n'est que le développement de la belle pensée de M. de Lapparent : « les mathématiques ne seraient-elles pas surtout un admirable langage, le plus parfait qu'on puisse rêver pour raconter l'expérience ? »

C'est pour justifier cette pensée que l'auteur accorde tant d'importance aux paroles et aux propriétés des paroles. Il compte la faculté de parler, d'entendre les paroles, d'écrire, de percevoir l'écriture parmi les principes mêmes sur lesquels sont fondées toutes les mathématiques. Dès qu'il étudie un caractère quelconque dans la pensée, la succession des idées, leur identité, leur association, il montre immédiatement que cette propriété existe aussi dans les paroles et qu'il y a des paroles successives, des paroles identiques, des paroles associées, groupées en système. Toute une partie de son livre est une étude de grammaire sur les relations que certaines paroles doivent avoir les unes avec les autres lorsqu'elles constituent des séries.

C'est qu'en effet le nombre n'est pour lui qu'un certain langage permettant d'exprimer les propriétés des ensembles de perceptions distinctes. Il est fondé avant tout sur la faculté que possède l'homme de pouvoir transmettre de proche en proche à ses semblables de même langue une suite de mots toujours identique à elle-même. Beaucoup de notions mathématiques prennent un sens étonnamment simple, quand

elles sont assimilées ainsi à de simples phénomènes de langage. « Un nombre est avant tout un mot identique à un terme d'une suite déterminée. — Le nombre « Un » est le terme initial de cette suite sans avoir d'autre propriété mystérieuse. — Deux nombres formés par des mots identiques l'un et l'autre à un même terme de la suite des nombres sont dits des nombres égaux. — Deux nombres qui sont constitués par des mots différents sont dits des nombres inégaux. — Si deux nombres A et B sont tels que le nombre égal à A de la suite traditionnelle précède le nombre égal à B de cette même suite, on exprime le fait en disant que le nombre A est plus petit que le nombre B... » On ne peut s'empêcher d'être quelquefois surpris devant ces définitions qui nous causent un singulier embarras, parce qu'elles suppriment des mystères auxquels nous sommes habitués. N'est-ce pas cependant la meilleure manière de résoudre des problèmes en apparence très difficiles que de nous montrer clairement que le problème n'existe pas.

Quand on se rendra bien compte que les mathématiques sont simplement un langage particulier, on saura peut-être mieux s'en servir. On ne se figurera pas comme on le fait trop souvent que les mathématiques expliquent tout. On saura qu'elles se bornent à exprimer clairement certaines choses auxquelles ce langage convient. L'ouvrage de M. Santerre montre bien que certaines conditions sont indispensables pour que ce langage puisse être appliqué. Il indique avec précision quand ce mode d'expression est légitime et quand il devient inapplicable.

III

Enfin la psychologie prend une importance de premier ordre quand il s'agit d'aborder et de renouveler le vieux problème des principes sur lesquels se fonde tout le développement des mathématiques. Depuis l'antiquité deux théories se

sont partagé les esprits philosophiques : la théorie rationnelle et la théorie empirique. La première plaçait au début des mathématiques une série plus ou moins longue d'axiomes indémontrables et inexplicables. Ces axiomes étaient dus à une intuition qu'il n'était guère facile de comprendre et qui nous faisait pénétrer dans le domaine des vérités pures. Cette intuition a joué un grand rôle dans beaucoup de philosophies célèbres et les mathématiciens même les plus récents n'ont pas réussi à s'en débarrasser complètement. La théorie empirique prétendait supprimer l'intuition, elle confondait plus ou moins les axiomes et les postulats et considérait tous ces principes comme des résultats de l'expérience, de l'observation du monde physique.

M. Santerre propose une troisième théorie qui pourra peut-être réconcilier les éternels ennemis. Les principes mathématiques ont sans doute une origine empirique, ils sont tirés d'une certaine expérience, mais cette expérience n'est pas matérielle, physique ; elle est morale, intérieure et peut par certains côtés se rapprocher de ce qu'on appelait l'intuition. L'idée fondamentale du livre consiste à remplacer les axiomes, les postulats, les définitions par de simples observations psychologiques.

Helmholtz avait dit que la faculté de compter est basée sur la faculté de conserver l'ordre dans lequel les faits de conscience se sont succédé. M. Santerre dit avec plus de précision : la faculté de compter est basée sur la faculté que nous avons d'énoncer une série de mots, les uns à la suite des autres, dans un ordre déterminé et de pouvoir répéter cette suite de mots dans le même ordre. Elle est basée aussi sur la faculté qui nous permet d'associer des ensembles déterminés aux termes de la suite des nombres de façon à former des systèmes correspondants, tels que l'on puisse associer chaque terme de l'un avec chaque terme de l'autre. Pour comprendre comment se sont formées les mathématiques, il faut chercher la raison et le mécanisme psychologique

des différentes opérations qui entrent dans ces définitions.

Les faits psychologiques qui interviennent sont d'abord les phénomènes élémentaires, les souvenirs, les actes volontaires, les diverses perceptions, l'association des idées sans lesquels il n'y aurait aucune pensée précise. Mais les mathématiques ne se forment pas à ce niveau de la pensée, un animal qui ne posséderait que ces faits élémentaires ne serait pas capable de compter. Il faut leur ajouter un certain nombre de jugements élémentaires dont le plus simple est d'abord la distinction des faits de conscience les uns des autres, la distinction des diverses perceptions, des perceptions banales et des perceptions relatives à la voix humaine et surtout la distinction capitale entre les faits actuels et les souvenirs ou les reproductions des faits passés.

Le second groupe de jugements qui joue un rôle essentiel sont ceux qui portent sur le temps. Une des thèses remarquables de l'ouvrage c'est que la notion de nombre sort de la notion d'antériorité et de postériorité. Arrivé à un certain degré intellectuel, l'homme sait reconnaître qu'un phénomène est antérieur à un autre et il constate en même temps que jamais ce phénomène antérieur à un autre ne lui est postérieur. Il est très intéressant de remarquer que c'est probablement sous la forme de cette simple observation psychologique que se présente pour M. Santerre le vénérable principe de contradiction. L'homme remarque également l'existence de phénomènes intermédiaires, antérieurs à un fait, postérieurs à un autre. Ce sont des découvertes scientifiques du premier âge de l'humanité et ce sont ces découvertes qui ont été enregistrées dans les notions fondamentales des mathématiques.

En troisième lieu interviennent les jugements qui portent sur l'identité des phénomènes, jugements dont la définition est fort intéressante. L'auteur se trouve en présence d'une difficulté souvent signalée par les philosophes. Les phénomènes qu'on appelle identiques sont cependant en même

temps des phénomènes distincts par quelque côté : car, s'ils se confondaient complètement ils formeraient un seul phénomène et il n'y aurait plus de place pour un jugement. M. Santerre remarque que cette distinction dépend de certains faits qui accompagnent dans notre conscience les phénomènes identiques, de l'évocation par association de certaines images différentes qui entourent chacun d'eux comme des harmoniques entourent le son fondamental. Deux faits sont identiques, quand ils ne se distinguent que par ces harmoniques, quand ils ne peuvent plus être distingués l'un de l'autre une fois isolés de toutes ces images qui les accompagnaient. Deux faits sont différents, quand ils se distinguent en eux-mêmes, indépendamment de la place qu'ils occupent dans notre conscience. Comme ces images associées sont constituées par les souvenirs des différents événements qui ont accompagné le phénomène essentiel lors de ses diverses apparitions, il en résulte une conséquence curieuse c'est que le temps intervient comme l'un des grands facteurs de la notion d'identité. Le jugement d'identité devient postérieur au jugement de succession, ce qui n'avait guère été remarqué jusqu'ici. On est étonné de la profondeur de ces analyses psychologiques qui sont impliquées dans la notion élémentaire du nombre.

Après avoir analysé le jugement d'identité, ses variétés, ses conséquences, M. Santerre nous montre comment ce jugement conduit à la notion de groupe, de système, il analyse ces notions, leurs éléments essentiels, les éléments séparatifs d'un système, le fait initial et le fait final, le premier élément qui précède et le premier élément qui suit, les systèmes particuliers qui sont constitués par des suites de paroles et surtout le rang des termes de la suite où l'on voit percer pour la première fois le germe de la notion de nombre qui va s'épanouir.

En effet, nous arrivons à la notion de correspondance entre les systèmes qui a été très bien étudiée. L'homme peut for-

mer des couples d'éléments de deux systèmes S et S' jusqu'à ce qu'ils constituent un système complet de correspondance entre tous les éléments de l'un des groupes et la totalité ou une partie des éléments de l'autre. Il y a des suites de parole dont on peut associer une fois et une seule fois tous les éléments avec les éléments d'un système correspondant. Cette notion de correspondance va, comme on le voit, fournir l'explication complète de l'action de compter. Elle nous donnera en même temps l'occasion de faire des études intéressantes sur l'analyse psychologique d'une opération bien peu étudiée jusqu'à présent, l'opération qui consiste à ranger, à mettre en ordre des objets ou des phénomènes.

C'est ainsi que par une analyse psychologique beaucoup plus complète M. Santerre montre qu'il est inutile de faire appel à une intuition spéciale pour expliquer les principes du calcul ; il les trouve tout simplement dans des opérations psychologiques élémentaires qui existent chez tous les hommes et au delà desquelles nous ne pouvons pas remonter, parce que ce sont les plus simples opérations de l'intelligence.

IV

Malgré le grand nombre de ces analyses mentales on ne peut se dissimuler que l'ouvrage dans son ensemble ne produit pas l'impression d'une œuvre psychologique et qu'il déconcerte un peu le lecteur habitué à des travaux de ce genre, cela tient à la forme dans laquelle il a été rédigé et à la méthode d'exposition.

Le psychologue expose d'ordinaire ses études en commençant par la description des phénomènes concrets qu'il se propose d'interpréter et il remonte ensuite de degré en degré jusqu'aux faits plus généraux et plus simples qu'il découvre par l'analyse. Dans le cas présent, la plupart des psychologues auraient débuté par la description des nombres tels qu'ils existent réellement aujourd'hui dans l'esprit des peuples

civilisés. Ensuite ils auraient cherché à montrer que ces nombres ne sont pas autre chose qu'un langage établi pour une correspondance particulière. Ils auraient établi que pour jouer ce rôle ce langage doit être un système de paroles associées de certaine manière à certains systèmes de faits ; enfin, en étudiant la constitution de ces systèmes de paroles et de ces systèmes de phénomènes, ils arriveraient aux jugements d'identité, de succession, de distinction et aux faits psychologiques fondamentaux.

L'auteur de ce livre suit l'ordre inverse : les faits psychologiques qu'il a découverts comme la base des mathématiques sont exposés les premiers et il en déduit les notions plus complexes. Or cette méthode déductive est d'ordinaire appliquée à des raisonnements abstraits prenant pour point de départ des propositions très générales considérées comme le résultat de l'intuition ou comme la conclusion d'autres sciences. On est un peu surpris de voir appliquer la déduction à des faits psychologiques élémentaires, à propos desquels on ne raisonne pas d'ordinaire de cette manière. De là, si je ne me trompe, le sentiment de gène qu'éprouveront sinon les mathématiciens, du moins les philosophes et les moralistes qui ont beaucoup à apprendre en lisant ce livre.

Il faut bien comprendre que cette méthode et ce langage répondent ici à une nécessité particulière. Les mathématiques sont à la fois des faits psychologiques comme les autres et en même temps elles formulent des règles qui servent à diriger toutes nos autres études. Il ne suffit pas de les analyser, de les décomposer en éléments comme nous ferions dans l'étude d'une passion quelconque ; il faut encore tenir compte de leur rôle de science rationnelle et ne pas méconnaître leur importance logique. Quand on présente une nouvelle interprétation des mathématiques, il faut sans cesse démontrer que, malgré cette nouvelle interprétation, les mathématiques conservent leur caractère éminemment logique, que toutes les propositions restent d'accord les unes avec les

autres et se déduisent correctement l'une de l'autre.

Sans doute M. Santerre soutient que l'on devrait enseigner les mathématiques d'une toute autre manière et commencer par de tous autres points de départ, mais il montre que cette modification dans les principes ne transformerait pas la méthode d'exposition et laisserait à ces études la même rigueur déductive. Aussi le voit-on à propos de chaque notion nouvelle, jugement de succession, jugement d'identité, correspondance des systèmes, démontrer ce qu'il appelle la réflexité, la symétricité, la transitivité de ces conceptions pour montrer sans cesse quel est l'usage logique qu'on en peut faire et dans quelle mesure on reste d'accord avec soi-même en les utilisant.

Ce souci de l'exposition logique qui explique la forme et la rédaction du livre me paraît en justifier également les limites. C'est lui qui empêche l'auteur de poursuivre plus loin des analyses psychologiques intéressantes en elles-mêmes mais qui sont en dehors de l'objet spécial qu'il s'est proposé. Ainsi il ne se préoccupe pas d'examiner les différentes formes de numération duodécimale ou décimale par exemple : ce problème qui a été déjà souvent bien étudié se rattache à des études historiques et linguistiques, il ne paraît pas essentiel à une théorie logique du nombre.

On est surtout étonné de voir que dans un livre qui traite de la nature du nombre il ne soit jamais question d'un terme que le vulgaire considère comme un nombre intéressant, le terme zéro. C'est que le zéro soulève une question plus générale et le plus souvent mal posée. Tantôt il ne s'agit que d'une manière d'écrire : $a - b = 0$ n'est qu'une autre façon d'écrire $a = b$. $F(x\ y) = 0$ est une écriture conventionnelle qui a un sens déterminé. Dans d'autres cas le terme zéro appliqué à des phénomènes mesurables prend un sens différent suivant la méthode employée, suivant le degré de précision des instruments. Ce terme exprime en général le fait que nos moyens d'investigation ne nous permettent pas

actuellement de pousser plus loin une certaine étude. Pour exprimer un nombre, il faut avoir perçu une certaine différence ou une certaine succession, or, il y a des cas où dans les conditions actuelles nous ne pouvons percevoir à propos de ces phénomènes ni succession, ni différence et c'est cette ignorance momentanée et relative que nous exprimons par le terme zéro. Cette expression de notre ignorance soulève ainsi de gros problèmes psychologiques et philosophiques qui n'ont guère été encore élucidés clairement. Ils se rattacheraient sans doute à l'analyse psychologique du nombre mais ils ne font pas partie nécessaire d'un travail surtout logique sur les notions élémentaires de l'arithmétique.

Malheureusement je suis incapable d'apprécier suffisamment ce caractère logique et mathématique de l'ouvrage, mais j'ai tout lieu de croire qu'il sera reconnu par les mathématiciens et qu'il donnera une plus grande valeur à une œuvre déjà intéressante au point de vue psychologique.

Malgré ces limites que s'est imposées momentanément M. Santerre, il est bien évident que des études ainsi conçues sur les principes à la fois psychologiques et logiques des mathématiques pourraient s'étendre beaucoup plus loin. Les fractions, les nombres décimaux soulèvent des problèmes analogues, les formes géométriques sur bien des points suivent les mêmes règles, les formules algébriques, le calcul intégral constituent aussi des langages fondés sur les lois de la psychologie élémentaire.

Certaines de ces études ont déjà été commencées à un point de vue presque semblable. M. Méray, professeur à l'université de Dijon, considérait les fractions comme une simple suite de deux nombres séparés l'un de l'autre par le signe « sur », et il les traitait comme des grandeurs analogues aux autres. M. Hilbert, professeur à Göttingen, a fait la même étude sur les segments de droite et a réformé sur ce point la géométrie analytique. Il y aurait lieu d'aller plus loin, de réaliser l'algèbre universelle que rêvait Leibniz, en montrant que les

mêmes lois psychologiques s'appliquent à tous les systèmes de grandeur qu'il nous plairait de former pourvu qu'elles jouissent des propriétés fondamentales nécessaires pour constituer un système arithmétique.

Un tel livre relierait les théories de ces grands novateurs et rendrait un très grand service aux sciences mathématiques en proposant un classement rationnel des notions mathématiques aujourd'hui si misérablement éparses dans un dédale d'axiomes et de principes rattachés à une intuition vague, ou inexactement tirés de l'expérience physique et n'ayant aucun lien entre eux.

Un tel livre rendrait aussi de grands services aux sciences de la pensée en montrant les lois des opérations élémentaires de l'intelligence, en faisant voir que depuis le début de l'humanité il y a eu déjà une analyse profonde de notre conscience qui s'exprimait par les mathématiques et en étendant ainsi énormément le domaine des études proprement psychologiques.

Souhaitons que M. Santerre qui a si heureusement réalisé la première partie de ce travail puisse la continuer par d'autres recherches du même genre et contribuer ainsi à l'union de deux études que l'on séparait à tort, les mathématiques et la psychologie.

Dr PIERRE JANET.

Mai 1906.

PSYCHOLOGIE DU NOMBRE

INTRODUCTION

Pour arriver à mon but, qui est d'expliquer la genèse des mathématiques, j'ai besoin de m'appuyer sur quelques idées philosophiques.

Je ne veux, en aucune manière, entrer dans les longues discussions que pourrait soulever chacun des termes que j'emploie ; je donnerai seulement au début de ce travail quelques définitions conventionnelles des termes essentiels. Il suffira que ces termes aient un sens précis une fois connu, et qu'ils le conservent toujours ; car il n'est pas nécessaire dans un travail sur les mathématiques, de rechercher dans quelle mesure le sens conventionnel attribué à un terme correspond à l'interprétation plus ou moins juste du même terme dans les systèmes philosophiques et psychologiques.

La science des nombres, qui est le premier échelon de toutes les autres, peut s'établir sur un système de principes tirés de l'observation psychologique. Ces principes une fois posés, on peut en déduire par le raisonnement tous les théorèmes de l'arithmétique. Cette base expérimentale, et les théorèmes qui en sont la conséquence logique, sont susceptibles

d'être vérifiés dans une très large mesure par l'observation, et ne peuvent jamais être infirmés par elle.

Je commencerai l'exposition de cette suite de principes et de déductions par l'établissement de la notion des faits de conscience, et par le principe de la conservation du souvenir de ces faits, bases essentielles de toute connaissance humaine.

PREMIÈRE PARTIE

PHÉNOMÈNES ET SYSTÈMES DE PHÉNOMÈNES

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PSYCHOLOGIQUES FONDAMENTALES

I

LES FAITS DE CONSCIENCE

Les modifications qui s'accomplissent dans notre conscience, en y laissant des souvenirs distincts les uns des autres, éveillent dans l'esprit l'idée de phénomènes distincts les uns des autres qui s'accomplissent en produisant ces modifications dans notre conscience. Le souvenir de ces phénomènes se confond avec le souvenir des modifications qu'ils ont fait naître.

Définition. — Tout phénomène, que ce soit une perception, un sentiment, ou une volition, qui modifie notre conscience, s'appelle un *phénomène de conscience* ou un *fait de conscience*.

Principe I. — Le souvenir de chacun des phénomènes qui ont agi sur notre conscience y persiste d'une façon invariable, et y reste distinct du souvenir de chacun des autres.

II

SYSTÈMES DE PHÉNOMÈNES

Les phénomènes qui ont un caractère commun quelconque permettant de les distinguer des autres phénomènes de la conscience constituent un *système défini*.

Chacun des phénomènes qui constituent un système est dit un des *éléments du système* ou un élément qui fait *partie du système*.

Cette définition n'aura de portée, que lorsque l'observation psychologique nous aura fait voir comment on peut distinguer certains groupes de faits de tous les autres, en leur reconnaissant ou en leur attribuant certains caractères communs, et les différentes circonstances dans lesquelles cette distinction pourra s'effectuer. Pour parvenir à ce résultat, nous emploierons plusieurs opérations mentales, dont les principales sont les suivantes.

III

ACTES VOLONTAIRES

Principe II. — L'homme a la faculté d'accomplir à son gré certains actes qui agissent sur sa propre conscience ; et non seulement il conserve le souvenir de ces actes, mais il se rappelle en outre qu'il les a accomplis à son gré, ce qui lui permet de les distinguer des autres phénomènes qui ont agi sur sa conscience.

Définition. — Tout phénomène qu'une personne fait naître à son gré dans sa propre conscience ou dans celle d'une autre personne est dit le *résultat d'un acte volontaire* de la personne qui a fait naître le phénomène.

IV

CHOIX

Principe III. — Nous sommes en état de distinguer, à notre gré, le souvenir de tel ou tel phénomène de notre conscience du souvenir de tous les autres.

Définition. — Distinguer le souvenir d'un phénomène de la conscience du souvenir de tous les autres, s'appelle *choisir*,

et constitue un acte de la conscience dont elle conserve le souvenir. Cet acte s'appelle un *choix*.

V

ASSOCIATION

Principe IV. — L'homme a la faculté d'unir le souvenir de tel phénomène de sa conscience, qu'il peut choisir à son gré, au souvenir de tel autre, qu'il peut aussi choisir à son gré ; et l'union de ces souvenirs constituée par l'exercice de cette faculté, est un nouveau phénomène dont il conserve le souvenir.

L'homme se rappelle quels sont les phénomènes de la conscience dont les souvenirs ont été unis l'un à l'autre, et il se souvient aussi que cette union a eu lieu.

Définition. — Unir un souvenir à un autre s'appelle *associer* ; et l'acte ainsi constitué s'appelle une *association*.

Tel phénomène et tel autre phénomène dont les souvenirs ont été unis l'un à l'autre sont dits les *phénomènes associés*, ou bien les *éléments de l'association*.

Conséquence immédiate. — Il résulte de ces définitions et du principe IV, qu'un quelconque des phénomènes de la conscience et n'importe quel autre de ces phénomènes peuvent être associés l'un à l'autre ; et que l'association de l'un de ces phénomènes à l'autre constitue un acte dont le souvenir persiste dans notre conscience invariablement lié aux souvenirs des éléments associés.

Un phénomène quelconque de la conscience, distinct de chacun des éléments d'une association, peut être rattaché à cette association. Le nouveau système ainsi constitué agit sur notre conscience, et son souvenir y persiste invariablement lié aux souvenirs de chacun des éléments de l'association et du phénomène qui y a été rattaché. Ce nouveau système est dit aussi une association de phénomènes.

D'une façon générale, on voit que lorsque nous aurons accompli une association, nous pourrons toujours en accomplir une nouvelle en lui rattachant un phénomène quelconque de la conscience distinct des précédents.

Les éléments anciens de cette association et l'élément nouveau qui lui est associé sont dits les éléments de la nouvelle association ; et le souvenir de cette nouvelle association persiste dans notre conscience invariablement lié aux souvenirs de ses éléments.

VI

LES PERCEPTIONS

Principe V. — Les actions extérieures, qui s'exercent sur les organes de l'homme, font naître dans sa conscience des phénomènes qu'il a la faculté de distinguer des autres phénomènes de sa conscience.

Définition. — Tout fait de conscience qu'une action extérieure a fait naître dans la conscience de l'homme en s'exerçant sur ses organes s'appelle une *perception*.

Principe VI. — L'homme possède en outre la faculté de distinguer les perceptions que des actions extérieures ont fait naître dans sa conscience en agissant sur certains de ses organes, de celles que des actions extérieures ont fait naître dans sa conscience en agissant sur d'autres organes.

En particulier, l'homme a la faculté de discerner si l'action qui a fait naître une perception dans sa conscience s'est exercée sur ses *organes visuels* ou sur d'autres. Les actions qui s'exercent sur nos organes visuels font naître dans notre conscience des perceptions qui seront dites des *perceptions visuelles*.

De même, l'homme discerne parmi ses perceptions, celles que des actions extérieures ont fait naître dans sa conscience en s'exerçant sur ses *organes auditifs*. Ces perceptions sont dites des *perceptions auditives*.

VII

LA PAROLE ET L'ÉCRITURE

Principe VII. — L'homme possède des organes appelés *organes vocaux*, qu'il peut, à son gré, mettre en action, de façon à faire naître des perceptions auditives dans la conscience de toute personne placée dans des conditions où cette action puisse s'exercer sur ses organes auditifs.

Il peut distinguer les perceptions que lui-même ou d'autres personnes ont fait naître dans sa conscience par l'action de leurs organes vocaux, de toutes ses autres perceptions auditives. Parmi ces perceptions auditives, certaines ont la propriété d'éveiller par association, dans l'esprit de la personne qui les entend, certaines pensées déterminées. Ces perceptions auditives constituent des *perceptions verbales*.

Définitions. — La faculté que possède l'homme de faire naître des perceptions verbales dans la conscience s'appelle *la parole*. L'exercice de cette faculté s'appelle aussi la parole.

Parler désigne l'acte de toute personne qui exerce la parole.

On exprime que des perceptions verbales agissent sur notre conscience en disant que *nous entendons parler*.

On exprime à la fois que des perceptions verbales agissent sur notre conscience, et que nous savons quelle personne les a fait naître, en disant que *nous entendons parler telle personne*.

Lorsque l'exercice de la parole est pratiqué de façon à faire naître dans la conscience une perception verbale distincte des autres, cet exercice de la parole est dit *une parole*.

Parler de façon à faire naître une perception verbale distincte dans la conscience s'appelle *prononcer une parole*.

L'homme sait distinguer, parmi ses perceptions verbales, celle qu'il a fait naître lui-même et celles que d'autres personnes ont fait naître dans sa conscience.

Les unes comme les autres constitueront donc des systèmes définis.

Principe VIII. — Toute personne peut à son gré faire naître, au moyen de l'écriture, des perceptions visuelles dans sa conscience et dans celle d'autres personnes.

L'homme a la faculté de distinguer les perceptions visuelles qu'il fait naître par ce moyen dans sa conscience, de ses autres perceptions visuelles. Parmi ces perceptions visuelles, certaines ont la propriété de faire naître dans la conscience de la personne qui les éprouve les mêmes pensées que pouvaient évoquer les paroles précédentes : elles sont dites des *perceptions graphiques*.

Convention. — Associer une certaine perception graphique à une certaine perception verbale s'appelle *écrire* un mot ; et associer une certaine perception verbale à une certaine perception graphique s'appelle *lire* un mot.

VIII

DÉSIGNATIONS

Définition. — Associer une perception verbale à un phénomène s'appelle : désigner ce phénomène ; et le souvenir de la *désignation* d'un phénomène lie invariablement le souvenir de la perception verbale au souvenir du phénomène.

Convention. — L'expression : « *un fait* de notre conscience » sert indifféremment à désigner n'importe lequel des faits de notre conscience, mais n'en désigne qu'un seul chaque fois qu'on l'emploie.

L'expression : « *un autre fait* de notre conscience » employée à la suite de l'expression : « un fait de notre conscience » sert aussi indifféremment à désigner n'importe lequel des faits de notre conscience ; mais le seul fait qu'elle désigne, chaque fois qu'on l'emploie, n'est pas celui qui est désigné par l'expression : « un fait de notre conscience ».

J'emploierai l'expression : « *deux faits* de conscience » pour désigner à la fois un fait de conscience et un autre fait de conscience, sans attribuer provisoirement au mot *deux* d'autre signification que celle de « un et un autre ». Le mot ne sera employé provisoirement qu'avec ce sens restreint, sans lui attribuer d'autre signification.

Pour établir les relations générales entre les phénomènes de notre conscience, j'aurai besoin des désignations usuelles du *calcul littéral :* chaque lettre de l'alphabet pourra désigner n'importe lequel des faits de notre conscience, mais toujours le même dans le courant d'un même raisonnement ou d'une même théorie.

Quand j'aurai fait choix d'une lettre A pour désigner tel fait de notre conscience, je dirai indifféremment pour désigner ce fait : A ou le fait A, ou le fait désigné par A.

CHAPITRE II

RELATIONS FONDAMENTALES ENTRE LES FAITS DE CONSCIENCE

L'exercice des opérations précédentes fournit à la conscience un certain nombre de notions qui permettent d'établir entre les divers phénomènes des relations, dont les principales sont l'antériorité, la postériorité et l'identité.

I

ANTÉRIORITÉ, POSTÉRIORITÉ DE PHÉNOMÈNES

Principe IX. — Tout phénomène de notre conscience, que ce soit une perception, un sentiment, ou une volition, s'y accomplit avec le souvenir d'autres phénomènes.

Le fait qui s'accomplit est dit le fait *présent* ; ceux dont le souvenir accompagne l'accomplissement de ce fait, sont dits les faits *passés*, et nous sommes en état de distinguer le fait présent des faits passés.

Soit un fait présent A qui s'accomplit avec le souvenir des faits passés P, P′,..., P″. Nous sommes en état de conserver d'une façon invariable dans notre conscience le souvenir de ces divers faits ; et nous avons en outre la faculté de nous souvenir que le fait A s'est accompli avec le souvenir des faits P, P′,..., P″.

Définition. — L'accomplissement de A établit donc dans notre conscience une relation permanente entre le souvenir du fait A et celui de chacun des faits P, P′,..., P″; ce qui s'exprime en disant que A s'est *accompli postérieurement* à P, P′..., P″, ou que P, P′,..., P″ se sont *accomplis antérieurement* à A.

On exprime plus simplement ces relations entre le fait A et chacun des faits P, P′..., P″, en disant que le fait A est *postérieur* à chacun des faits P, P′,..., P″, ou que chacun des faits P, P′,..., P″ est *antérieur* au fait A, ce qui s'écrit :

$$A \gg P \qquad A \gg P' \;\ldots\ldots\; A \gg P''$$

ou

$$P \ll A \qquad P' \ll A \;\ldots\ldots\; P'' \ll A$$

On exprime les mêmes relations entre A et P en disant, soit que P *précède* A, soit que A *suit* P ou *succède* à P.

Principe X. — Lorsqu'un phénomène A s'est accompli avec le souvenir des phénomènes P, P′..., P″, aucun des phénomènes P, P′,..., P″ ne s'est accompli avec le souvenir du phénomène A, qui n'existait pas encore dans notre conscience quand P, P′,..., P″ s'y sont accomplis.

Ceci s'exprime dans le langage convenu que nous avons défini.

Les faits P, P′..., P″ antérieurs à un fait A ne sont jamais postérieurs à ce phénomène.

Ou encore, les relations :

$$A \ll B \text{ et } A \gg B$$

entre A et B, sont *incompatibles*.

Principe XI. — Un fait de notre conscience, que nous désignerons par A, peut être postérieur à des faits P, P′..., P″ de notre conscience et antérieur à d'autres Q, Q′,..., Q″, ce qui s'écrit :

$$A \gg P, \qquad A \gg P', \ldots\ldots A \gg P''$$
$$A \ll Q, \qquad A \ll Q', \ldots\ldots A \ll Q''$$

Théorème I. — Lorsqu'un fait de conscience A est postérieur à un fait P et antérieur à un fait Q, il en résulte que P est antérieur à Q.

En effet, le fait Q s'accomplit avec le souvenir du fait A; mais le souvenir de A étant invariablement lié au souvenir de

P, il s'ensuit que Q s'accomplit avec le souvenir de P, ce qui s'exprime en disant que P est antérieur à Q.

Transitivité de l'antériorité de phénomènes. — La propriété de deux phénomènes de conscience P et Q d'être nécessairement liés l'un à l'autre par la relation d'antériorité :

$$P \ll Q$$

lorsqu'ils sont liés l'un et l'autre à un même phénomène de conscience A par les relations d'antériorité :

$$P \ll A \qquad A \ll Q$$

s'appelle la *propriété transitive* de ces deux dernières antériorités de phénomènes qui expriment, l'une l'antériorité de P, l'autre la postériorité de Q sur un même phénomène A.

La propriété transitive de deux telles antériorités qui s'énoncent encore à la fois sous la forme :

$$P \ll A \ll Q$$

est dite la propriété transitive des antériorités de faits de conscience.

Phénomènes successifs. — Quand un phénomène A de notre conscience est lié à un autre phénomène B de notre conscience par l'une des relations incompatibles :

$$A \ll B \text{ ou } A \gg B \qquad (1)$$

on exprime ce fait en disant : le phénomène A et le phénomène B sont *successifs*.

On exprime le même fait en disant : le phénomène B et le phénomène A sont *successifs*.

En effet, cette nouvelle expression signifie que B est lié à A par l'une des relations :

$$B \ll A \text{ ou } B \gg A$$

qui ont respectivement la même signification que les relations suivantes :

$$A \gg B \text{ et } A \ll B \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) étant les mêmes, il en résulte qu'en disant : le phénomène A et le phénomène B sont successifs, ou le phénomène B et le phénomène A sont successifs, on exprime que les phénomènes A et B sont liés par l'une des relations (1) ou par l'une des relations (2), ce qui constitue deux expressions synonymes. On dit aussi : les phénomènes A et B ou B et A sont successifs.

Lorsque les phénomènes A et B sont successifs, l'un A de ces phénomènes est lié à l'autre B par l'une des relations :

$$A \ll B \qquad (1)$$
$$A \gg B \qquad (2)$$

La relation (1) exprime que le phénomène A est antérieur à l'autre B, tandis que la relation (2) exprime indirectement que le phénomène B est antérieur au phénomène A.

Donc, lorsque des phénomènes A et B sont successifs, l'un de ces phénomènes est antérieur à l'autre; et, pour qu'un phénomène et un autre phénomène soient successifs, il faut et il suffit que l'un d'eux soit antérieur à l'autre.

On pourra dire aussi : pour qu'un phénomène et un autre soient successifs, il faut et il suffit qu'ils s'accomplissent l'un après l'autre.

On exprime encore que deux phénomènes sont successifs en disant qu'ils *se succèdent* ou qu'ils constituent une *succession* de deux phénomènes.

Lorsque tout élément A d'un ensemble de phénomènes est lié à tout autre élément B de cet ensemble par l'une ou l'autre des deux relations incompatibles d'antériorité ou de postériorité :

$$A \ll B \qquad A \gg B$$

on exprime ce fait en disant que cet ensemble de phénomènes est constitué par des éléments successifs.

ORDRE DE SUCCESSION DE DEUX PHÉNOMÈNES. — Le mode d'accomplissement de deux phénomènes successifs A et B est caractérisé par ce fait que les accomplissements de A et de B sont toujours liés l'un à l'autre par l'une des relations incompatibles d'antériorité :

$$A \ll B \qquad B \ll A$$

Celle de ces deux relations qui régit le mode d'accomplissement des deux phénomènes A et B, définit un caractère propre au mode d'accomplissement de ces deux phénomènes, tandis que la relation symétrique d'antériorité entre A et B est incompatible avec le mode d'accomplissement de A et de B. Le caractère propre au mode d'accomplissement de deux phénomènes successifs A et B défini par l'une des deux relations $A \ll B$, $B \ll A$ s'appelle l'*ordre de succession* des phénomènes A et B.

L'accomplissement de deux phénomènes successifs, A et B, ne nous fait pas seulement connaître chacun des éléments qui constituent cette succession de phénomènes ; il nous fait connaître, en outre, l'ordre dans lequel ils *se succèdent* ou, comme l'on dit encore, l'ordre dans lequel ils *sont rangés*.

ORDRE DE SUCCESSION DES ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE QUELCONQUE DE PHÉNOMÈNES. — Lorsqu'un ensemble de phénomènes est constitué par des éléments successifs, l'ordre de succession de chacun des éléments de cet ensemble par rapport à chacun des autres, définit le mode d'accomplissement des phénomènes de l'ensemble.

Le mode d'accomplissement des phénomènes d'un ensemble quelconque de phénomènes déterminé par les relations d'antériorité qui lient chacun des éléments de cet ensemble aux autres éléments de l'ensemble, définit un caractère de l'accomplissement des éléments du système.

Ce caractère propre à l'accomplissement des éléments d'un ensemble de phénomènes successifs, est dit l'ordre de succession de ces phénomènes.

PHÉNOMÈNES INTERMÉDIAIRES. — Si un phénomène A de notre conscience est lié à un phénomène P et à un autre phénomène Q de notre conscience par l'une des relations transitives :

$$P \ll A \ll Q \text{ ou } P \gg A \gg Q \quad (1)$$

on exprime ce fait en disant que le phénomène A est *intermédiaire* aux phénomènes P et Q. On peut aussi dire : le phénomène A est intermédiaire aux phénomènes Q et P, car on exprime qu'il existe entre ces phénomènes une des relations :

$$Q \ll A \ll P \text{ ou } Q \gg A \gg P \quad (2)$$

Comme les relations (2) résultent des relations (1) et réciproquement, on voit que cette nouvelle expression a le même sens que la précédente.

Lorsqu'un phénomène A est intermédiaire aux phénomènes P et Q, on a l'une ou l'autre des relations :

$$P \ll A \ll Q \qquad P \gg A \gg Q$$

De l'une résulte la relation :

$$P \ll Q$$

et de l'autre la relation :

$$P \gg Q$$

Il s'ensuit que si un phénomène A est intermédiaire à des phénomènes P et Q, ces phénomènes sont successifs.

Comme les relations $P \ll Q$, $P \gg Q$ sont incompatibles, il en résulte que les relations (1) sont incompatibles, et qu'une seule de ces relations peut exister pour un phénomène intermédiaire à P et Q.

Comme les relations (1) peuvent s'exprimer :

$$P \ll A \ll Q \text{ et } Q \ll A \ll P$$

il en résulte que le phénomène A intermédiaire à P et Q, est postérieur à l'un de ces phénomènes et antérieur à l'autre ; et réciproquement.

Donc, pour qu'un phénomène de la conscience soit intermédiaire à un phénomène P et à un autre phénomène Q, il faut et il suffit qu'il soit postérieur à l'un d'eux et antérieur à l'autre.

Il résulte encore des relations (1) que si un phénomène A est intermédiaire à P et à Q, les phénomènes P et Q sont successifs.

Si on a $P \ll Q$, on a la relation :

$$P \ll A \ll Q$$

Si on a $Q \ll P$, on a la relation :

$$Q \ll A \ll P$$

II

ANTÉRIORITÉ, POSTÉRIORITÉ DE PAROLES

Il résulte du principe VII basé sur l'observation psychologique de la parole, que l'homme peut à son gré prononcer une parole, et que cette parole fait naître une perception verbale dans sa propre conscience et dans celle de toute autre personne qui entend prononcer cette parole.

L'homme a conscience d'avoir mis volontairement en action le fonctionnement de ses organes vocaux, car il a conscience de tous ses actes volontaires, et il en conserve le souvenir comme nous l'avons établi au principe II par l'étude psychologique des actes volontaires.

Il en résulte que si une même personne prononce successivement deux paroles, elle sait toujours laquelle des deux a

été prononcée antérieurement à l'autre, comme nous l'avons établi en traitant de l'antériorité d'un fait de conscience sur un autre.

La notion d'antériorité d'une parole sur une autre a un sens précis quand les deux paroles ont été prononcées par une même personne, mais cette notion n'est pas directement applicable quand les deux paroles ont été prononcées par des personnes différentes, car ces deux paroles sont le résultat de deux actes qui s'accomplissent dans deux consciences différentes ; et chacune d'elles ne peut connaître directement les actes de l'autre.

Un acte d'une personne P et un acte d'une autre personne P' ne peuvent parvenir à la connaissance d'une personne P'' que par les perceptions que ces deux actes font naître dans la conscience de P''. On pourra connaître ainsi l'antériorité de l'une de ces perceptions sur l'autre, mais on ne pourra en déduire la notion d'antériorité des actes qui font naître ces perceptions que par des conventions appropriées.

Pour étendre la notion d'antériorité d'une parole à une autre parole au cas où ces deux paroles ne sont pas prononcées par la même personne, il convient d'établir d'abord le principe suivant basé sur l'observation psychologique des perceptions verbales.

Principe XII. — Une même personne peut toujours prononcer successivement deux paroles *a* et *b;* et elle se rappelle toujours laquelle de ces deux paroles a été prononcée avant l'autre. Si la parole *a* a été prononcée avant la parole *b*, les perceptions verbales α et β que ces paroles font respectivement naître dans la conscience de toute personne P qui les entend, sont liées par la relation d'antériorité :

$$\alpha \ll \beta$$

Si deux paroles *a* et *b* prononcées l'une par une personne, l'autre par une autre personne font naître respectivement des

perceptions verbales α et β dans la conscience d'une même personne P, et si ces perceptions sont liées par la relation d'antériorité :

$$\alpha \ll \beta$$

les perceptions orales α' et β' que les paroles a et b font respectivement naître dans la conscience de toute autre personne P′ qui les entend, seront liées par la relation d'antériorité :

$$\alpha' \ll \beta'$$

Définition de l'antériorité de paroles. — Ce principe nous permet de définir la relation d'antériorité d'une parole a sur une autre parole b, par la propriété des paroles a et b de faire naître respectivement des perceptions verbales α et β dans la conscience de toute personne qui les entend; et cela de telle façon que α et β soient liés par la relation d'antériorité :

$$\alpha \ll \beta$$

Ainsi, on dira que la parole a est antérieure à la parole b ou que la parole b est postérieure à la parole a, et l'on écrira :

$$a \ll b \quad \text{et} \quad b \gg a \qquad (1)$$

pour exprimer que les perceptions verbales α et β que les paroles a et b font respectivement naître dans la conscience d'une personne quelconque P, sont liées par les relations d'antériorité et de postériorité :

$$\alpha \ll \beta \quad \text{et} \quad \beta \ll \alpha \qquad (2)$$

Les relations (1) sont dites l'une une antériorité, et l'autre une postériorité de paroles.

Remarque. — La relation d'antériorité $\alpha \ll \beta$ qui a lieu entre les deux perceptions verbales α et β que deux paroles a et b ont fait respectivement naître dans la conscience d'une personne P, n'entraîne pas toujours la relation d'antériorité $\alpha' \ll \beta'$ entre les deux perceptions verbales α' et β' que les

deux paroles *a* et *b* font respectivement naître dans la conscience d'une autre personne P'.

Pour que l'une de ces relations entraîne l'autre, il faut et il suffit que la personne qui entend les paroles *a* et *b* soit placée à la même distance des deux personnes qui parlent et qu'elle demeure à des distances égales de ces deux personnes jusqu'à l'accomplissement final des deux perceptions verbales.

La définition de l'antériorité d'une parole *a* sur une parole *b*, basée sur le principe XII, doit donc être restreinte au cas où la personne qui entend les deux paroles *a* et *b* et celles qui les prononcent, remplissent les conditions suffisantes pour que le principe XII soit applicable.

Il faut encore remarquer qu'aucune restriction n'est imposée à la définition de l'antériorité de deux paroles prononcées par une même personne qui concorde toujours avec l'antériorité des deux actes volontaires de la personne qui a prononcé les paroles.

Dans les conditions ordinaires de la vie, les personnes qui prononcent deux paroles et celle qui entend ces deux paroles, remplissent les conditions suffisantes pour pouvoir établir la relation d'antérioritéde l'une de ces paroles sur l'autre, d'après la définition que nous avons adoptée.

Transitivité des antériorités de paroles. — Les antériorités transitives de paroles :

$$a \ll b \qquad b \ll c \tag{1}$$

entraînent toujours l'antériorité de paroles :

$$a \ll c \tag{2}$$

car si nous désignons par α, β, γ les perceptions verbales que les paroles *a*, *b*, *c* font respectivement naître dans la conscience d'une personne, ces perceptions sont liées par les antériorités de faits de conscience :

$$\alpha \ll \beta \qquad \beta \ll \gamma \tag{3}$$

qui entraînent l'antériorité de faits :

$$\alpha \ll \gamma \qquad (4)$$

Les paroles *a* et *c* faisant naître les perceptions verbales α et γ dans la conscience d'une personne, il résulte de la relation (4) que les paroles *a* et *b* sont liées par l'antériorité

$$a \ll c$$

ce qu'il fallait établir.

Ordre de succession de deux paroles successives. — Deux paroles A et B sont dites successives lorsqu'elles sont liées par l'une ou l'autre des relations d'antériorité :

$$A \ll B \qquad B \ll A$$

Celle des deux relations d'antériorité, incompatible avec l'autre, qui lie les deux paroles successives A et B, exprime leur ordre de succession, tandis que l'autre relation d'antériorité, possible entre deux paroles successives, A et B, exprime un autre ordre de succession incompatible avec l'ordre de succession des paroles A et B.

Deux paroles *a* et *b* prononcées successivement par une même personne A, nous font connaître non seulement ces deux paroles, mais encore l'ordre dans lequel elles se sont succédé, ainsi qu'il résulte immédiatement du principe XII de l'antériorité des paroles et des définitions que nous venons d'établir.

Paroles intermédiaires. — Une parole A, liée à deux paroles P et Q par l'une ou l'autre des relations transitives d'antériorité :

$$P \ll A \ll Q \qquad Q \ll A \ll P$$

est dite une parole intermédiaire aux paroles P et Q.

Il résulte immédiatement de la transitivité de l'antériorité de

paroles, que si une parole A est intermédiaire à deux paroles P et Q, les paroles P et Q sont des paroles successives.

III

ANTÉRIORITÉ, POSTÉRIORITÉ DE PHÉNOMÈNES PHYSIQUES

Nous avons tout d'abord défini l'antériorité d'un phénomène psychique sur un autre. Nous avons ensuite étendu cette notion aux paroles, c'est-à-dire aux phénomènes qui font naître des perceptions verbales dans la conscience de toute personne qui subit l'action de ces phénomènes. Il s'agit maintenant de montrer comment la notion d'antériorité peut s'appliquer à deux *phénomènes physiques* quelconques, et comment on peut reconnaître dans chaque cas particulier lequel des deux phénomènes est antérieur à l'autre.

Les phénomènes physiques ne sont que des faits imaginés par nous pour édifier dans notre esprit une représentation de l'univers que nous ne pouvons connaître que par les perceptions qui agissent sur notre conscience; et ce sont ces phénomènes fictifs qui sont considérés comme la cause de nos perceptions.

La base sur laquelle repose l'établissement de l'antériorité d'un fait physique sur un autre, est, avant tout, l'antériorité de la perception de ce fait sur la perception de l'autre. Cependant l'ordre de succession de deux faits A et B pourra ne pas être déduit uniquement de l'ordre de succession des perceptions A′ et B′ que ces faits font naître respectivement dans la conscience d'une même personne.

L'antériorité de l'un des phénomènes A et B sur l'autre, basée seulement sur l'antériorité de l'une des perceptions A′ et B′ sur l'autre, peut n'être qu'apparente. Il y a lieu de rechercher si cet ordre apparent de succession des phénomènes A et B ne doit pas être modifié pour être mis en accord avec la loi que nous admettons pour la propagation des actions des phénomènes, entre les endroits où ils s'ac-

complissent et la place occupée par la personne qui subit leur action.

Les raisons qui feront intervertir l'ordre de succession apparent de deux phénomènes A et B, seront principalement basées sur la nécessité d'établir un accord complet entre la notion d'antériorité des phénomènes et les théories adoptées pour la propagation du son et de la lumière à travers les milieux qui nous séparent des lieux où s'accomplissent les phénomènes physiques considérés.

Dans chaque cas particulier, l'interprétation de nos théories mondiales nous permettra toujours de reconnaître lequel des deux phénomènes physiques considérés est antérieur à l'autre.

L'ordre de succession de deux phénomènes physiques A et B établi par une personne P qui subit les actions de A et de B en les interprétant d'après les principes qui règlent notre représentation du monde extérieur, doit être le même pour toute autre personne P′ qui subit les actions de A et de B en les interprétant suivant les mêmes principes.

La relation d'antériorité d'un phénomène A sur un phénomène B n'est donc pas une relation dépendante de l'interprétation d'une seule personne placée à tel ou tel endroit et dans telles ou telles conditions déterminées.

Cette relation est la même quelles que soient les personnes sur lesquelles les actions des deux phénomènes s'exercent. Elle constitue donc une relation caractéristique des deux phénomènes physiques considérés.

Cette relation propre à deux phénomènes physiques qui s'établit dans la conscience de toute personne qui subit leur action, contribue à justifier l'introduction du concept de phénomènes physiques dans notre système de représentation du monde extérieur.

La notion d'antériorité de deux faits de conscience se trouve ainsi étendue à deux phénomènes physiques quelconques.

L'application des lois qui régissent le monde extérieur, aux conceptions de phénomènes, d'espace et de temps que nous avons introduites dans notre représentation de l'univers, nous permet d'étendre les propriétés des faits de conscience à n'importe quels phénomènes physiques par l'observation raisonnée de la nature dans chaque cas particulier.

Le principe X de contradiction qui établit l'incompatibilité de la relation d'antériorité $A \ll B$, entre les deux faits de conscience A et B, avec la relation symétrique d'antériorité $B \ll A$ entre les mêmes faits, doit être étendu à deux phénomènes physiques quelconques sous la forme suivante :

Principe X *bis*. — Deux phénomènes quelconques A et B liés entre eux par la relation d'antériorité $A \ll B$ ne sont jamais liés par la relation d'antériorité symétrique $B \ll A$.

Transitivité de l'antériorité de phénomènes physiques. — La transitivité de l'antériorité de phénomènes physiques, c'est-à-dire la propriété des deux relations d'antériorité :

$$P \ll A \qquad A \ll Q$$

entre des phénomènes physiques P, A, Q, d'entraîner toujours la relation :

$$P \ll Q$$

entre les phénomènes P et Q résulte directement du concept de temps tel qu'il existe dans notre représentation du monde.

La transitivité des antériorités de phénomènes de conscience, précédemment établie avec le même sens restreint aux phénomènes de conscience, devra donc être étendue à la transitivité des antériorités de phénomènes, quel que soit le genre de ces phénomènes.

Définitions communes a toute espèce de phénomènes. — Les définitions de phénomènes successifs, de phénomènes intermédiaires, et la notion de l'ordre de succession de deux

phénomènes de conscience, s'appliquent à des phénomènes quelconques sans avoir à distinguer s'ils sont psychiques ou physiques.

Remarque. — L'assimilation est donc complète entre les relations d'antériorité des phénomènes psychologiques et celles des phénomènes physiques.

Toutefois, il faut remarquer que l'établissement des relations d'antériorité des phénomènes psychiques repose sur un très petit nombre de principes psychologiques. Les relations d'antériorité des paroles reposent sur un nombre encore assez restreint de principes, tandis que l'extension des mêmes relations aux phénomènes physiques repose sur tous les concepts introduits dans la représentation du monde extérieur, et sur les lois expérimentales qui régissent ces concepts.

IV

L'IDENTITÉ DES PHÉNOMÈNES

Définition de l'identité des faits de conscience. — Un fait de conscience A se distingue d'un fait de conscience B parce que, d'après le premier principe établi, les souvenirs de A et de B persistent d'une façon invariable dans notre conscience en restant toujours distincts l'un de l'autre.

Mais il est établi par le principe d'antériorité que le fait A s'accomplit toujours avec le souvenir d'autres faits P, P′,... P″, tandis que B s'accomplit avec le souvenir des faits Q, Q′... Q″, et que les souvenirs qui ont accompagné l'accomplissement de A et de B persistent invariablement liés aux souvenirs de A et B sans se confondre avec eux.

Deux faits A et B peuvent se distinguer l'un de l'autre sans tenir compte des faits qui ont accompagné leur accomplissement, ou bien ils ne pourront plus se distinguer l'un de l'autre si l'on ne tient pas compte des faits qui ont accompagné leur accomplissement.

Dans un cas, c'est-à-dire lorsque deux phénomènes de conscience ne se distinguent l'un de l'autre que par la place qu'ils ont occupée dans notre conscience, ils sont dits des phénomènes *identiques*. Dans l'autre cas, c'est-à-dire lorsque les deux phénomènes se distinguent l'un de l'autre indépendamment de la place qu'ils ont occupée dans notre conscience, ils ne sont pas identiques, et on exprime ce fait en disant qu'ils sont *différents*.

Deux phénomènes distincts seront donc toujours identiques ou différents.

La désignation de phénomènes de conscience identiques ou différents que nous venons de définir, n'exprime pas la relation entre tout phénomène A et tout phénomène B, puisqu'elle ne s'applique pas au cas où A et B ne désignent pas deux phénomènes distincts, c'est-à-dire au cas où A et B désignent l'un et l'autre un seul et même phénomène. Les définitions que nous avons données de l'identité et de la différence de deux phénomènes de conscience, ne sont que des cas particuliers d'une théorie plus complète de l'identité de faits de conscience, pour laquelle nous adoptons les définitions suivantes :

Définition. — Tout phénomène de conscience qui ne peut se distinguer d'un phénomène A, quand on ne tient pas compte des souvenirs qui ont accompagné leur exécution, est dit *identique* à A.

Tout phénomène de conscience qui peut se distinguer du phénomène A, sans tenir compte des souvenirs qui ont accompagné leur exécution est dit *différent* de A.

Définition générale de l'identité des phénomènes. — L'identité de deux phénomènes telle que nous venons de la définir, ne s'applique qu'à des phénomènes psychiques.

Cette première définition était nécessaire à l'intelligence de la notion d'identité, parce que l'identité de faits de conscience sert de base principale à la théorie générale de l'identité.

Il convient toutefois d'établir une autre définition qui s'applique également aux phénomènes de conscience et aux phénomènes physiques, dont l'antériorité et la postériorité ont été définies au paragraphe précédent.

Nous remarquerons tout d'abord que deux phénomènes A et B, peuvent se distinguer l'un de l'autre par ce fait qu'un phénomène C n'a précédé l'accomplissement que d'un seul des phénomènes A et B.

Si deux phénomènes A et B peuvent se distinguer l'un de l'autre sans tenir compte des relations d'antériorité ou de postériorité qui existent entre chacun d'eux et tout autre phénomène, on exprime ce fait en disant que les phénomènes A et B sont différents.

Tout phénomène X qui ne peut se distinguer d'un phénomène A quand on ne tient compte d'aucune des relations d'antériorité qui lient les phénomènes X et A à n'importe quel phénomène physique ou psychique est dit un phénomène identique à A.

Il résulte de ces définitions que tous les phénomènes qui ne sont pas identiques à l'un d'eux A, sont différents de A.

On exprimera donc le même fait en disant qu'un phénomène est différent de A ou qu'il n'est *pas identique* à A.

Expression algébrique de l'identité. — Si nous désignons par A un phénomène, et par B encore un phénomène, on exprime que le phénomène A est identique au phénomène B en disant ; « A identique à B », ce qui s'écrit :

$$A \equiv B$$

Cette manière de s'exprimer par signes et caractères, s'appelle une *expression algébrique*, et l'expression algébrique $A \equiv B$ s'appelle une *identité*. L'identité dans laquelle les caractères désignent exclusivement des phénomènes s'appelle une *identité de phénomènes*.

Réflexité de l'identité. — Une identité dans laquelle les

caractères sont identiques, comme dans l'identité : $A \equiv A$, est dite une *identité réflexe*.

Il résulte de la définition de l'identité que tout phénomène est identique à lui-même. Toute identité réflexe de phénomènes, telle que $A \equiv A$, aura donc lieu quel que soit le phénomène désigné par les caractères A.

On exprime qu'une identité réflexe a lieu, quel que soit le phénomène désigné par ses deux caractères identiques, en disant que l'identité de phénomènes est réflexe.

Symétricité de l'identité. — Une identité constituée par deux termes A et B, qui s'énoncent dans l'ordre de succession $A \ll B$, et une autre identité constituée par les mêmes termes qui s'énoncent dans l'ordre de succession $B \ll A$ sont dites des *identités symétriques*.

Il résulte encore de la définition de l'identité que si un phénomène A est identique à un phénomène B, le phénomène B est aussi identique au phénomène A.

On peut donc dire indifféremment que A est identique à B, ou que B est identique à A, ce qui s'exprime à la fois en disant que A et B sont identiques.

Si donc une identité de phénomènes :

$$A \equiv B$$

a lieu, l'identité symétrique :

$$B \equiv A$$

a lieu ; et réciproquement, si l'identité de phénomènes :

$$B \equiv A$$

a lieu, l'identité symétrique :

$$A \equiv B$$

a lieu aussi.

On exprime cette propriété des identités de phénomènes, en disant que l'identité de phénomènes est symétrique.

Transitivité de l'identité. Principe XIII. — Lorsqu'un phénomène A, et un phénomène B, sont l'un et l'autre identiques à un phénomène C, ces deux identités entraînent toujours l'identité de A et de B.

Ceci s'exprime en se servant des expressions algébriques.

Les identités de phénomènes :

$$A \equiv C \qquad B \equiv C$$

entraînent toujours l'identité des phénomènes :

$$A \equiv B$$

On exprime habituellement cette propriété de deux identités de phénomènes ayant un terme commun, en disant que l'identité de phénomènes est *transitive*.

Le principe XIII comporte l'extension suivante, que nous énoncerons ainsi :

Principe XIII *bis*. — Si un phénomène A et un phénomène B sont identiques l'un à un phénomène C, l'autre à un phénomène C′ identique à C, il en résulte toujours que A et B sont des phénomènes identiques.

En effet, on a par hypothèse les identités :

$$A \equiv C \qquad B \equiv C' \qquad C \equiv C'$$

Il résulte du principe de la transitivité des identités que $A \equiv C$ et $C' \equiv C$ entraînent $A \equiv C'$ qui avec $B \equiv C'$ constituent les deux identités transitives :

$$A \equiv C' \qquad B \equiv C'$$

D'où il résulte :

$$A \equiv B$$

Les identités de phénomènes :

$$A \equiv C \qquad B \equiv C' \qquad C \equiv C'$$

entraînent donc l'identité :

$$A \equiv B$$

ce qui s'exprime en disant que si des phénomènes A et B sont identiques l'un à un phénomène C, l'autre à un phénomène C′ identique à C, les deux phénomènes A et B sont identiques entre eux ; ce qu'il fallait démontrer.

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE FAITS IDENTIQUES. — La définition de l'identité nous fournit un moyen, applicable à n'importe quel phénomène de notre conscience, de décider si ce phénomène est identique ou n'est pas identique à un phénomène A. Nous pourrons donc déterminer individuellement quels sont les phénomènes identiques à un phénomène A, et ces actes constitueront un système dénommé : le système des phénomènes identiques au phénomène A.

Il résulte de la propriété réflexe de l'identité que le phénomène A est un des éléments du système.

Il résulte de la propriété transitive de l'identité que tout élément X du système est aussi identique à n'importe quel élément Y du système.

En effet, les identités :

$$X \equiv A \qquad Y \equiv A$$

expriment que X et Y font partie du système, et de ces identités, il résulte l'identité :

$$X \equiv Y$$

qui exprime que l'élément X est identique à l'élément Y.

Tout phénomène Z de la conscience, identique à un élément quelconque X du système, fait aussi partie du système, car on a par hypothèse les identités :

$$Z \equiv X \qquad X \equiv A$$

d'où résulte l'identité :

$$Z \equiv A$$

qui exprime que le phénomène X fait partie du système.

Le système des phénomènes identiques à A comprend donc

tous les phénomènes identiques à l'un quelconque des phénomènes de ce système. La connaissance d'un quelconque X des phénomènes identiques à A, permettra de déterminer chacun des phénomènes identiques à X, et par conséquent de définir le système des phénomènes identiques à A.

On exprimera que les phénomènes d'un système sont identiques à l'un quelconque d'entre eux, en disant que les phénomènes de ce système sont *identiques entre eux*, ou plus simplement qu'ils sont identiques.

Expression algébrique de la non-identité. — Nous avons déjà établi que tout phénomène A est ou n'est pas identique à un phénomène quelconque B. Nous avons vu comment on exprime algébriquement qu'un phénomène A est identique à un phénomène B.

Nous allons faire connaître comment on exprime algébriquement qu'un phénomène A n'est pas identique à un phénomène B, c'est-à-dire que les phénomènes A et B sont différents l'un de l'autre.

Pour exprimer que deux phénomènes A et B sont liés l'un à l'autre par cette relation, on dit indifféremment : « A non identique à B » ou « B non identique à A », ce qui s'écrit :

$$A \not\equiv B \qquad B \not\equiv A$$

Ces deux manières d'exprimer ou d'écrire la non-identité de deux phénomènes, en désignant les phénomènes par des lettres séparées l'une de l'autre à l'aide du signe $\not\equiv$, constituent deux expressions algébriques symétriques.

Il faut remarquer, que si la non-identité de phénomènes est symétrique, elle n'est jamais réflexe comme l'identité de phénomènes.

Il faut remarquer, en outre, que la transitivité de deux de ces expressions algébriques ayant un terme commun ne s'impose pas comme pour les identités de phénomènes. Ainsi les expressions algébriques :

$$A \not\equiv B \qquad B \not\equiv C$$

n'entraînent pas nécessairement l'expression :

$$A \not\equiv C.$$

Phénomènes respectivement identiques a des phénomènes différents. — Si deux phénomènes différents A et B sont identiques, l'un à un phénomène C, l'autre à un phénomène C′, les phénomènes C et C′ sont toujours différents l'un de l'autre.

En effet, il résulte directement du principe XIII *bis*, que la condition nécessaire pour que deux phénomènes A et B puissent être identiques l'un à un phénomène C, l'autre à un phénomène C′ identique à C, est que A et B soient des phénomènes identiques.

Si donc deux phénomènes A et B sont différents, c'est-à-dire, si l'on a :

$$A \not\equiv B$$

les identités :

$$A \equiv C \qquad B \equiv C' \qquad C \equiv C'$$

ne peuvent pas toutes avoir lieu avec la précédente relation, qui exprime que la condition nécessaire pour que ces identités aient lieu n'est pas réalisée.

Si donc deux phénomènes A et B différents l'un de l'autre, et deux phénomènes C et C′ sont tels que l'on ait :

$$A \not\equiv B \qquad A \equiv C \qquad B \equiv C' \qquad (1)$$

les phénomènes C et C′ ne seront jamais liés par la relation $C \equiv C'$, c'est-à-dire qu'ils seront toujours liés l'un à l'autre par la relation :

$$C \not\equiv C' \qquad (2)$$

La relation (1) entraîne donc toujours la relation (2), ce qui s'exprime en langage ordinaire dans les termes où est énoncée la proposition à démontrer.

Accomplissements distincts du même phénomène. — Lors-

que des phénomènes de la conscience sont identiques, on considère chacun d'eux comme le même phénomène qui s'est accompli, tantôt avec certains souvenirs, et tantôt avec d'autres souvenirs, qui permettent de distinguer les uns des autres les divers accomplissements de ce phénomène.

Nous avons précisé au § VIII du chapitre I le sens de l'expression « un autre fait de conscience » employée à la suite d'une expression qui désigne un fait de conscience.

L'expression « *un autre fait* de conscience » suppose implicitement qu'un fait de conscience vient d'être spécifié; et elle sert à désigner n'importe quel fait de notre conscience qui n'est pas celui qui vient d'être spécifié. D'ailleurs, l'expression « un autre fait de conscience » ne désigne jamais, chaque fois qu'on l'emploie, qu'un seul fait de conscience. Il faut ajouter qu'on dit « *le même fait* de conscience » pour exprimer qu'on entend parler du fait de conscience qui vient d'être spécifié.

Dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placés pour considérer les phénomènes identiques entre eux comme des accomplissements du même phénomène, on a été conduit à dire : « le même phénomène », non seulement pour exprimer qu'on parle d'un phénomène A qui vient d'être spécifié, mais encore pour désigner tout phénomène identique à A.

On emploie cette expression avec les désinences du pluriel lorsqu'on s'en sert pour désigner plusieurs phénomènes qui sont des accomplissements distincts du même phénomène.

Ainsi l'on dit : « les mêmes phénomènes » pour désigner des accomplissements distincts d'un phénomène A précédemment spécifié, c'est-à-dire des phénomènes identiques à A.

Des phénomènes identiques à un phénomène A sont dits : « les mêmes phénomènes que A », pour exprimer qu'ils ne sont que des accomplissements distincts du même phénomène A.

On dit aussi, en parlant de phénomènes individuellement

désignés, que ce sont « les mêmes phénomènes », lorsqu'ils sont tous identiques entre eux.

L'expression « le même phénomène », restreinte dans l'une de ses acceptions à ne désigner qu'un seul phénomène, se trouve ainsi étendue, dans l'autre acception, à désigner tout phénomène identique au phénomène spécifiquement lié à cette expression.

En étendant le sens de l'expression : « le même phénomène », on a été conduit à restreindre le sens de l'expression : « un autre phénomène ».

Cette expression qui dans son acception primitive désigne tout phénomène qui n'est pas le phénomène spécifique lié à l'expression : « un autre phénomène », est restreinte dans sa nouvelle acception à ne désigner qu'un phénomène différent de celui qui lui est opposé.

Identité respective des éléments de deux systèmes. — Si un système S et un système S′ sont constitués chacun par deux phénomènes tels que l'un des éléments A de S soit identique à un élément A′ de S′, et que l'autre élément B de S soit identique à l'autre élément B′ de S′, on exprime ce fait en disant que chacun des deux systèmes S et S′ est constitué par deux éléments *respectivement identiques* aux deux éléments de l'autre, ou que les éléments de S et de S′ sont respectivement identiques.

On dit aussi que S et S′ sont des systèmes de deux phénomènes constitués respectivement par les mêmes éléments.

On exprime encore la même idée en disant que les phénomènes A et B sont *respectivement les mêmes* que les phénomènes A′ et B′.

D'une façon générale, on dit que deux systèmes S et S′ sont constitués par des éléments respectivement identiques, lorsqu'on peut associer successivement une fois et une seule, chacun des éléments de l'un des deux systèmes S et S′ à un élément identique de l'autre système, de façon à former une

succession T d'associations telle que tout élément de S et de S′ fasse partie d'une association et d'une seule de ces associations.

Suites de phénomènes constituées respectivement par les mêmes éléments. — Lorsque les phénomènes de deux suites S et S′, constituées chacune par deux éléments respectivement identiques aux éléments de l'autre, se succèdent dans un ordre tel, que l'élément de S antérieur à l'autre élément de S, et l'élément de S′ antérieur à l'autre élément de S′, soient des phénomènes identiques, on exprime ce fait en disant que les suites S et S′ sont constituées respectivement par les mêmes éléments *rangés dans le même ordre*.

Lorsque les phénomènes de deux suites S et S′, constituées chacune par deux éléments respectivement identiques, ne se succèdent pas dans un ordre tel que ces deux suites soient constituées respectivement par les mêmes éléments, rangés dans le même ordre, on exprime ce fait en disant que les suites S et S′ sont constituées respectivement par les mêmes éléments *rangés dans des ordres différents*.

Il résulte de ces définitions que deux suites, formées chacune par deux éléments respectivement identiques, sont soumises à l'alternative d'être des suites constituées respectivement par les mêmes éléments rangés dans le même ordre ou dans des ordres différents.

Dans le sens le plus général, on dit que deux suites S et S′ sont constituées par les mêmes phénomènes rangés dans le même ordre, lorsque les événements respectivement identiques des deux suites S et S′ s'accomplissent de telle façon que deux éléments quelconques a et b de S se succèdent dans le même ordre que les éléments respectivement identiques a' et b' de S′ associés l'un à a, l'autre à b dans le système d'associations qui définit l'identité respective des éléments de S et de S′.

V

L'IDENTITÉ DES PAROLES

Paroles identiques. — Toute parole prononcée par une personne agit sur sa propre conscience pour y faire naître une perception verbale ; mais cette parole fait aussi naître une perception verbale dans la conscience de chacune des autres personnes qui entendent cette parole.

Les perceptions que deux paroles *a* et *b* font naître dans la conscience de l'une des personnes qui entendent ces paroles, sont deux faits de conscience identiques ou différents ; mais le caractère d'identité ou de non-identité des perceptions que deux paroles font naître dans la conscience d'une seule personne, ne peut suffire à établir la notion d'identité de deux paroles, sans faire appel aux principes suivants, tirés de l'observation psychologique :

Principe XIV. — L'homme peut à son gré prononcer une parole qui fasse naître dans sa propre conscience une perception verbale identique à telle autre de ses perceptions verbales antérieures.

Principe XV. — Lorsque deux paroles font naître des perceptions identiques dans la conscience d'une personne, elles font naître des perceptions identiques dans la conscience de toute autre personne qui les a entendues.

Donc, si deux paroles font naître des perceptions différentes dans la conscience d'une personne, elles font naître des perceptions différentes dans la conscience de tout autre personne qui les a entendues.

Remarque. — Le principe XV ne s'applique rigoureusement que si les personnes qui parlent et celles qui entendent parler, restent dans une position relative invariable, et que si les milieux qui les séparent ne subissent pas de modification.

Dans les circonstances ordinaires de la vie, ces conditions sont suffisamment remplies pour appliquer sans restriction ce principe à la définition des paroles identiques.

DÉFINITION. — Deux paroles seront dites identiques ou différentes selon qu'elles auront fait naître des perceptions verbales identiques ou différentes dans la conscience de toute personne qui les aura entendues.

Le caractère d'identité de deux paroles se déduit donc du caractère d'identité des perceptions auditives qu'elles font naître dans la conscience, sans tenir compte du caractère d'identité ou de non-identité des autres perceptions que ces paroles ont pu faire naître dans la conscience d'une même personne.

Il résulte immédiatement de cette définition que deux paroles sont toujours identiques ou différentes, puisque les perceptions verbales qu'elles font naître dans la conscience de toute personne qui les entend sont toujours identiques à la fois chez chacune de ces personnes, ou différentes à la fois chez chacune d'elles.

La définition des paroles identiques fondée sur le principe XV nous permet d'énoncer le principe XIV sous la forme suivante :

PRINCIPE XIV *bis*. — L'homme peut à son gré prononcer une parole identique à toute autre parole qu'il a entendue.

IDENTITÉ DES PAROLES. — Une identité de paroles est une identité dans laquelle les caractères des deux termes désignent des paroles.

L'identité de paroles est réflexe, symétrique et transitive comme l'identité de faits de conscience, c'est-à-dire que si on désigne par A et B deux paroles, on a les propositions suivantes :

1° $$A \equiv A$$

quelle que soit la parole désignée par A.

2° L'une quelconque des identités symétriques :

$$A \equiv B \qquad B \equiv A$$

entraîne l'autre.

Ces deux propositions sont la conséquence directe de la définition, puisque, d'après cette définition, elles expriment la réflexité et la symétricité des perceptions verbales que les paroles A et B font naître dans la conscience d'une personne.

3° $$A \equiv B \quad \text{et} \quad B \equiv C$$

entraînent

$$A \equiv C.$$

Si A, B, C désignent des paroles, et si *a*, *b*, *c* désignent les perceptions verbales que ces paroles font naître dans la conscience d'une personne, les identités de faits de conscience

$$a \equiv b \qquad b \equiv c$$

résultent par définition des identités de paroles :

$$A \equiv B \qquad B \equiv C.$$

Mais, d'après le principe XIII, les identités de faits :

$$a \equiv b \qquad b \equiv c$$

entraînent l'identité :

$$a \equiv c.$$

Les paroles A et C faisant naître dans la conscience d'une personne des perceptions verbales identiques, ces paroles sont identiques par définition, ce qui s'exprime :

$$A \equiv C.$$

Cette dernière identité de paroles est donc la conséquence des deux identités :

$$A \equiv B, \; B \equiv C;$$

ce qu'il fallait établir.

De ces trois propriétés fondamentales communes aux identités de faits de conscience et aux identités de paroles, on peut déduire pour les identités de paroles toutes les autres propriétés déjà établies pour les identités de faits de conscience.

Énonciations du même mot. — Nous avons considéré les phénomènes identiques comme des accomplissements distincts du même phénomène. On a été conduit, par des considérations analogues, à regarder les paroles identiques comme des énonciations distinctes de la même parole ou du même mot.

Les expressions *parole* ou *mot* sont employées l'une et l'autre avec une signification à peu près équivalente.

Cependant, nous emploierons l'expression : « *la même parole* » plus spécialement pour exprimer qu'il s'agit de la parole spécifiée qui se rattache à cette expression ; et nous nous servirons de l'expression : « *le même mot* » pour désigner tout mot ou toute parole identique au mot spécifiquement lié à cette expression.

Toute parole identique et postérieure à une parole A est dite *la répétition de la parole A*.

VI

L'IDENTITÉ DES OBJETS

Dans le monde tel que nous le concevons, il ne s'accomplit pas seulement des faits qui disparaissent sans laisser d'autre trace permanente que le souvenir qui en persiste dans notre conscience. Le caractère permanent de certains faits nous a permis de les associer entre eux, et de leur attribuer une origine commune en peuplant l'univers d'êtres et d'objets qui sont considérés comme la cause permanente des faits observés.

Ce n'est pas à dire qu'un objet ne subisse pas des modifications que nos sens apprécient; mais elles se produisent de façon que nous ne perdions pas la connaissance d'un objet unique sur lequel ces changements s'accomplissent.

Parmi les modifications que subissent les objets, il y en a une qui mérite de fixer l'attention : c'est le déplacement de l'objet de la position qu'il occupait dans l'espace, à une autre position.

Deux objets A et B qui ne peuvent se distinguer l'un de l'autre que par la position qu'ils occupent dans l'espace sont dits des *objets identiques*.

Deux objets A et B qui peuvent se distinguer l'un de l'autre sans tenir compte de leur position dans l'espace sont dits des *objets différents*.

CHAPITRE III

ÉTUDE DU SYSTÈME

Les notions précédentes nous permettent de préciser l'idée de système que nous avons considérée d'une manière générale au début, et d'examiner les relations des différents éléments du système.

Comme on l'a vu, les phénomènes que l'observation nous permet de distinguer des autres phénomènes de la conscience par un caractère commun quelconque, constituent un *système défini*.

I

ÉLÉMENTS SÉPARATIFS D'UN SYSTÈME

Définition. — Si dans un système défini on choisit un élément A tel que tous les autres éléments du même système soient les uns antérieurs, les autres postérieurs à A, cet élément sera dit un élément *séparatif* du système.

Si tous les phénomènes d'un système défini sont des éléments séparatifs de ce système, il en résulte que tout élément de ce système, et n'importe quel autre élément du même système, sont des phénomènes successifs. Un tel système est dit un système de phénomènes successifs.

On voit aussi que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que tout élément d'un système de phénomènes successifs est un élément séparatif du système.

Paroles séparatives. — Toute parole *a* prononcée par une personne A de telle façon que toutes les autres paroles de A

soient les unes antérieures, les autres postérieures à a, est dite *une parole séparative* de A.

Principe XVI. — Toute personne A peut à son gré prononcer une parole séparative de toutes les autres paroles qu'elle a prononcées ou qu'elle prononcera.

La personne A peut à son gré prononcer cette parole séparative, de façon qu'elle soit identique à telle ou telle parole qu'elle a entendue.

II

ÉLÉMENTS CONSÉCUTIFS D'UN SYSTÈME

Définition de la consécutivité. — Si deux phénomènes A et B sont des éléments séparatifs d'un système défini, et si aucun élément du système n'est intermédiaire à A et à B, ces deux phénomènes sont dits des éléments *consécutifs* du système.

Précession et succession immédiate. — Il résulte immédiatement de la définition de deux éléments consécutifs que l'un de ces éléments précède l'autre, et que cet autre le suit.

On exprime à la fois qu'un élément a d'un système S de phénomènes précède un élément b de ce système et que a et b sont deux éléments consécutifs de S en disant que l'élément a de S *précède immédiatement* l'élément b de S.

On dit aussi que l'élément b de S *suit immédiatement* l'élément a de S pour exprimer que b est celui des deux éléments consécutifs a et b de S qui suit l'autre.

Il résulte encore de la définition des phénomènes consécutifs que si dans un système les éléments A et B sont consécutifs, tout autre élément du système sera antérieur à la fois aux éléments A et B ou postérieur à la fois à ces éléments.

Donc, si dans un système, un élément A précède immédia-

tement un élément B, tout autre élément X qui précède A précèdera aussi B ; on aura donc :

$$X \ll A \quad \text{et} \quad A \ll B$$

c'est-à-dire que A sera intermédiaire à X et à B et que par suite X et B ne seront pas consécutifs ; A est donc le seul élément du système qui précède immédiatement B.

On voit de même, que si dans un système, un élément B suit immédiatement un élément A, l'élément B est le seul élément du système qui suive immédiatement A.

Un élément A d'un système qui précède immédiatement un autre élément B, pourra donc être dit : *l'élément qui précède immédiatement* l'élément B.

De même un élément B d'un système qui suit immédiatement un élément A de ce système pourra être dit : *l'élément qui suit immédiatement* l'élément A.

Ces dénominations ne pourront s'appliquer chacune qu'à un seul élément du système, qu'elles suffiront à désigner.

Paroles consécutives. — Deux paroles séparatives *a* et *b* prononcées par une même personne A, de telle façon qu'aucune parole de A ne soit intermédiaire à *a* et *b*, sont dites des paroles consécutives de A.

Nous avons établi au principe XII que l'homme peut toujours prononcer deux paroles successives. Nous allons énoncer une extension de ce principe dans la forme suivante :

Principe XVII. — Toute personne A peut toujours prononcer deux paroles successives, de telle façon qu'elles soient consécutives.

Elle peut prononcer ces deux paroles consécutives de telle façon qu'elles soient respectivement identiques à deux paroles *a* et *b* qu'elle a entendues prononcer. Elle peut à son gré répéter les deux paroles *a* et *b* dans l'ordre de succession qu'il lui plaira de choisir.

On déduit facilement de la définition des paroles successives, et de la définition des éléments consécutifs d'un système de paroles, l'assimilation de toutes les relations entre les éléments des systèmes de phénomènes successifs, aux relations entre les paroles d'un système de paroles successives d'une même personne.

III

ÉLÉMENT INITIAL ET ÉLÉMENT FINAL

Théorème II. — Lorsque les faits de conscience constituent un système défini, il n'y en a qu'un seul qui puisse être antérieur à chacun des autres, et un seul qui puisse être postérieur à chacun des autres.

Désignons par A un phénomène d'un système défini qui soit antérieur à chacun des autres. Tout phénomène B de ce système distinct de A lui est donc postérieur, et par conséquent, B n'est pas antérieur à tous les autres phénomènes du système. A est donc le seul des phénomènes du système qui soit antérieur à tous les autres.

On voit de même que si un phénomène C est postérieur à chacun des autres phénomènes du système, tout phénomène B de ce système, distinct de C, n'est pas postérieur à C, et par conséquent n'est pas postérieur à tous les autres phénomènes du système. Il n'y a donc que le phénomène C qui soit postérieur à tous les autres.

Convention. — On exprime qu'un fait de conscience est le seul des éléments d'un système défini qui soit antérieur à chacun des autres, en disant : qu'il est le *fait initial* du système. On dit aussi qu'il est le *premier fait* du système.

On exprime qu'un fait de conscience est le seul des éléments d'un système qui soit postérieur à chacun des autres, en disant : qu'il est le *fait final* du système. On dit aussi : qu'il est le *dernier fait* du système.

Donc, quand un des faits d'un système défini sera anté-

rieur à tous les autres, et quand un fait du système sera postérieur à tous les autres, chacune des expressions : « le premier fait du système » et « le dernier fait du système » pourra servir à désigner un fait, et un seul du système, de façon à le distinguer des autres.

IV

PREMIER ÉLÉMENT QUI PRÉCÈDE ET PREMIER ÉLÉMENT QUI SUIT

Convention. — Si dans un système défini on choisit un élément A, il ne peut exister dans ce système qu'un seul élément qui soit le premier des éléments postérieurs à A ; et si un tel élément existe, il est dit le *premier élément qui suit* A dans le système défini.

Il ne peut également exister dans ce système qu'un seul élément qui soit le dernier des éléments antérieurs à A ; et si un tel élément existe, il est dit le *premier élément qui précède* A dans le système défini.

Théorème III. — Aucun phénomène d'un système ne peut être intermédiaire à un phénomène de ce système et au dernier de ceux qui le précèdent, ni à un phénomène de ce système et au premier de ceux qui le suivent.

Si nous désignons par A un phénomène d'un système, par M l'un des phénomènes du système qui précèdent l'acte A, et par N un élément du système intermédiaire aux phénomènes M et A, on a la relation :

$$M \ll A$$

et d'après les notions des phénomènes intermédiaires :

$$N \gg M \quad (1)$$

et

$$N \ll A \quad (2)$$

la relation (2) exprime que l'élément N fait partie des phéno-

mènes qui précèdent le phénomène A, et de la relation (1) ou M ≪ N, il résulte que le phénomène M n'est pas le dernier de ceux du système qui précèdent A.

Donc, s'il existe un phénomène intermédiaire à A et à un phénomène M qui précède A, le phénomène M ne sera pas le dernier de ceux du système qui précèdent A.

Il s'ensuit qu'il ne pourra exister dans un système aucun phénomène intermédiaire à un phénomène A et au dernier des phénomènes qui le précèdent.

On voit de même qu'il ne pourra exister dans un système de phénomène intermédiaire à un phénomène A et au premier de ceux qui le suivent.

Théorème IV. — Si dans un système défini on choisit un élément séparatif, le dernier des éléments qui le précèdent et le premier des éléments qui le suivent sont aussi des éléments séparatifs de ce système.

En effet, si nous désignons par A un élément séparatif d'un système défini, et par B le premier des éléments qui suivent A, tout élément de ce système sera un élément de A, un élément antérieur à A, ou un élément postérieur à A.

L'élément A précède l'élément B par hypothèse.

Tout élément M qui précède l'élément A précède B en vertu du théorème I.

Tout élément N qui suit l'élément A et qui est distinct de B suit B, puisque B est le premier des éléments qui suivent A.

Donc, dans ce système tout élément distinct de B précède ou suit B, et l'élément B est séparatif.

On voit de même que si nous désignons par B′ le dernier des éléments qui précèdent l'élément séparatif A, l'élément A suit B′ par hypothèse.

Tout élément M qui précède l'élément A et qui est distinct de B′ précède B′ par définition.

Tout élément N qui suit l'élément A suit B′ en vertu du théorème I.

Donc, tout élément distinct de B' précède ou suit B', et B' est un élément séparatif du système.

Les deux propositions suivantes sont la conséquence immédiate des deux précédentes, et des définitions de la consécutivité et de la précession.

Théorème V. — Dans un système défini de phénomènes, le premier élément qui précède un élément séparatif, et le premier élément qui suit un élément séparatif, sont l'élément qui précède immédiatement et l'élément qui suit immédiatement cet élément séparatif.

Théorème VI. — Dans un système défini de phénomènes, l'élément qui précède immédiatement et l'élément qui suit immédiatement un autre élément, sont le premier élément qui précède et le premier élément qui suit cet autre élément.

V

SUITES DE PHÉNOMÈNES

Définition. — Les phénomènes qui se succèdent immédiatement l'un après l'autre, depuis un premier jusqu'à un dernier phénomène, constituent ce qu'on appelle *une succession* ou *une suite de phénomènes*.

Chacun des phénomènes qui constituent une suite est dit un *élément* ou un *terme* de cette suite.

Suites finies et suites infinies. — On dit qu'une suite S de phénomènes est *finie*, lorsqu'on peut parvenir à trouver tous les phénomènes de S, en choisissant successivement des éléments de S, de telle façon que chacun de ces choix soit constitué par un élément de S qui ne fasse partie d'aucun des choix précédents.

Si une suite de phénomènes n'est définie à partir d'un terme initial donné que par une loi qui permet de déduire chaque terme du précédent, et si cette loi, applicable sans

distinction à tout terme de la suite, permet toujours de trouver le phénomène qui suit immédiatement un phénomène précédemment déterminé, cette loi ne définira pas une suite limitée par un dernier terme. On exprime ce fait en disant que la suite ainsi définie est *illimitée* ou qu'elle est *infinie*.

Il résulte tout d'abord de ces définitions que tous les termes d'une suite de phénomènes sont des éléments séparatifs de cet ensemble de phénomènes ; et que toute suite finie a un premier et un dernier terme, c'est-à-dire qu'elle est toujours constituée par un phénomène qui s'est accompli antérieurement et par un phénomène qui s'est accompli postérieurement à tous les autres phénomènes de l'ensemble.

Une suite de phénomènes dont le premier terme est *a* et dont le dernier terme est *b* est dite une suite de phénomènes *commençant* par *a* et *finissant* par *b*.

VI

SUITES DE PAROLES

La définition de la parole initiale et de la parole finale d'un ensemble de paroles d'une même personne, se déduit aisément de la définition de l'élément initial et de l'élément final d'un système de faits de conscience. Il en est de même de la définition de la première parole qui précède ou qui suit une autre parole de la même personne.

Des paroles prononcées par une même personne de telle façon que chacune de ces paroles soit suivie immédiatement par une autre depuis la première jusqu'à la dernière constituent une *suite de paroles* de cette personne.

Principe XVIII. — Toute personne peut à son gré prononcer une suite de paroles; et chacune des paroles qu'elle prononce ainsi successivement, peut à son gré être articulée de façon à être identique à n'importe quelle autre parole choisie parmi celles qu'elle a entendues.

RÉPÉTITION DANS LE MÊME ORDRE DE CHACUNE DES PAROLES D'UNE SUITE DONNÉE. — Il résulte du principe XVIII que l'homme peut toujours prononcer une suite S de paroles en répétant successivement une fois et une seule, chacune des paroles d'une autre suite S′ qu'il a entendu prononcer.

Il peut prononcer une telle suite S, en répétant successivement chacune des paroles de S′, de telle façon que toute répétition d'une parole de S′ soit suivie immédiatement par la répétition d'une autre parole de S′, choisie à son gré, parmi celles qui n'ont pas encore été répétées. Si la suite S′ est finie, on parviendra toujours à former ainsi une suite de paroles constituée par la répétition de toutes les paroles de S′.

Parmi les diverses manières de répéter successivement chacun des éléments d'une suite S′ de paroles, il y en a une qui consiste à répéter d'abord le terme initial de la suite S′, à faire suivre immédiatement la répétition du terme initial de S′ par la répétition du terme suivant de S′, et à continuer à faire suivre immédiatement la répétition de tout terme de S′ par la répétition du terme suivant de S′, jusqu'à ce qu'on ait répété tous les termes de S′.

De quelque façon qu'on choisisse successivement chacune des paroles d'une suite S′ pour les répéter l'une immédiatement après l'autre, on forme une suite S de paroles respectivement identiques à celles de la suite S′, selon la définition que nous avons donnée précédemment de l'identité respective des éléments de deux systèmes.

En effet, on peut associer, une fois et une seule, chacun des éléments de S′ à la répétition de ce même élément.

On obtient ainsi un système T d'associations formées chacune par un élément de S et un élément identique de S′.

Il résulte immédiatement du mode d'établissement du système T, que tout élément de S′ fait partie d'une association de T, et d'une seule de ces associations.

Tout élément *a* de S, étant par définition la répétition d'un

élément a' de S′ qui fait toujours partie d'une des associations de T, l'élément a fait partie de cette même association constituée par a' et la répétition a de a'.

L'élément a de S ne fait partie d'aucune autre association du système T, car toute autre association de T est formée par une parole b' de S′ distincte de a' associée à la répétition b de b' qui constitue un élément de S distinct de celui qui est formé par la répétition de a'.

On peut donc dire que les éléments des systèmes S et S′ sont respectivement identiques.

Si une personne se sert de la faculté qu'elle a de former une suite S de paroles, en répétant successivement une fois et une seule chacune des paroles d'une suite S′, de façon à faire suivre immédiatement la répétition de tout terme de S′ par la répétition du terme suivant de S′, la suite de paroles S, ainsi formée, est constituée respectivement par les mêmes paroles que S′ se succédant dans le même ordre, car les répétitions de deux paroles quelconques a' et b' de S′ qui se succèdent dans l'ordre $a' \ll b'$ s'accomplissent en répétant la parole a' avant la parole b' de façon à prononcer deux paroles a et b respectivement identiques à a' et b', et qui se succèdent dans l'ordre $a \ll b$, c'est-à-dire dans le même ordre que a' et b'.

L'homme peut donc toujours répéter, une fois et une seule, chacune des paroles d'une suite S′, de façon à former une suite S, constituée respectivement par les mêmes paroles que S′ *rangées dans le même ordre*. On exprime ce fait en disant que la suite S est la répétition de la suite S′.

On voit facilement que si toutes les paroles d'une suite S′ ne sont pas identiques entre elles, on peut répéter successivement chacune de ces paroles, de façon à former une suite S de paroles constituée respectivement par les mêmes paroles que S′ *rangées dans un ordre différent*.

Cette faculté de l'homme de pouvoir toujours répéter successivement chacune des paroles d'une suite quelconque S′, de façon à former une autre suite S de paroles respectivement

identiques à celles de S′ et rangées dans le même ordre ou dans un ordre différent, s'énonce ainsi qu'il suit :

Théorème VII. — L'homme qui a entendu prononcer une suite de paroles S′, peut à son choix répéter chacune des paroles de S′, l'une immédiatement après l'autre, dans l'ordre où elles ont été prononcées, ou bien dans tel autre ordre qu'il lui plaira de choisir.

Suites identiques de paroles. — Deux suites de paroles constituées respectivement par les mêmes éléments rangés dans le même ordre sont dites des *suites identiques de paroles*.

Nous avons vu que l'homme peut toujours répéter successivement chacune des paroles d'une suite S′, de façon à former une suite S, constituée respectivement par les mêmes paroles rangées dans le même ordre, c'est-à-dire qu'il peut toujours répéter successivement chacune des paroles d'une suite S′ de façon à former une suite S identique à S′.

Cette définition nous permet d'énoncer une partie du théorème précédent sous la forme suivante :

Théorème VII *bis*. — L'homme qui a entendu prononcer une suite S′ de paroles, peut à son gré prononcer une suite de paroles S identique à la suite S′.

Répétition d'une suite de paroles. — Prononcer une suite S de paroles de telle façon qu'elle soit identique à une suite donnée S′, s'appelle *répéter la suite S′*.

Cette nouvelle définition nous permet d'énoncer le théorème précédent sous la forme :

Théorème VII *ter*. — L'homme qui a entendu prononcer une suite de paroles peut à son gré répéter cette suite.

CHAPITRE IV

RELATIONS ENTRE LES SYSTÈMES

Avant d'aborder l'étude des relations entre les systèmes, il convient d'examiner certaines suites de paroles que l'observation nous permet de distinguer des autres par un caractère commun.

Nous ne nous occuperons que du mode de génération et d'écriture de ces suites, ainsi que de la dénomination générale qu'on attribue à chacune d'elles.

Nous n'attribuerons un sens conventionnel à chacune de ces suites de paroles, que lorsque nous aurons besoin d'utiliser ces formes de langage pour désigner tels phénomènes, ou tels systèmes de phénomènes.

I

SOMMES

L'expression algébrique formée par une suite de paroles séparées les unes des autres par le mot *plus* s'appelle une *somme*.

Les paroles séparées les unes des autres par le mot *plus*, qui composent une somme, s'appellent : les *éléments*, les *parties* ou les *termes* de la somme.

Lorsque chacun des termes d'une somme désigne un signe graphique, cette somme s'écrit en traçant successivement sur une même ligne les différents signes désignés par chacun des termes de la somme, en les séparant les uns des autres par le signe $+$.

Ainsi la somme A *plus* B *plus* C, dont les termes désignent des lettres de l'alphabet, s'écrit :

$$A + B + C$$

Lorsque chacun des termes d'une somme désigne un système de phénomènes, cette somme est dite une *somme de systèmes* de phénomènes.

Lorsque chacun des termes d'une somme de systèmes de phénomènes est réduit à ne désigner qu'un seul phénomène, la somme est dite une *somme de phénomènes*.

La somme $A+B+\ldots+C$ de systèmes s'appelle la somme des systèmes A, B, ..., C.

Faire suivre immédiatement le dernier terme d'une somme par un autre terme s'appelle ajouter cet autre terme à la somme.

Quand la somme est une somme de systèmes, et que le terme qu'on y ajoute désigne un système, on dit qu'on ajoute ce système à une somme de systèmes.

II

SYSTÈME TOTAL

Quand un système A et un système B n'ont aucun élément commun, le système constitué par tous les éléments de A et tous les éléments de B est dit : le *système total* des systèmes A et B.

Les systèmes A et B sont dits les *systèmes partiels* du système total.

Convention. — On désigne le système total d'un système A et d'un système B par l'une ou par l'autre des expressions algébriques A *plus* B ou B *plus* A, qui s'écrivent :

$$A+B \text{ et } B+A,$$

c'est-à-dire par la somme de deux systèmes partiels dont les éléments constituent le système total.

On désigne le système total du système A+B et du système C par l'expression : système A *plus* B, *plus* système C, qui s'écrit :

$$(A+B)+C$$

en plaçant A+B entre deux parenthèses, pour indiquer que A+B est un terme de la somme des systèmes A+B et C.

On convient de donner à la somme de systèmes :

$$A+B+C$$

la même signification qu'à la somme : (A+B)+C, c'est-à-dire qu'elle désignera le système total des systèmes A+B et C.

D'une façon générale, quand on aura défini le système désigné par une somme de systèmes :

$$A+B+C+\ldots+D \quad (1)$$

la somme de systèmes :

$$A+B+C+\ldots+D+E \quad (2)$$

formée en ajoutant un terme E à la somme (1), désignera le système total du système (1) et du système E. La somme (2) désignera donc un système unique.

Nous avons défini le système désigné par une somme de deux systèmes :

$$A+B$$

puis, nous avons défini le système désigné par la somme de systèmes :

$$A+B+C$$

formée en ajoutant un terme C à la somme A+B.

On pourra donc, au moyen de la convention précédente, définir de proche en proche le sens conventionnel attribué aux sommes de systèmes obtenus en ajoutant un terme à la somme précédente, et parvenir ainsi à la définition du système désigné par une somme quelconque de systèmes :

$$A+B+\ldots+E.$$

Toute somme de systèmes désignera donc un système unique.

Le système désigné par la somme des systèmes A,B,C,...,D s'appelle le système total des systèmes A, B, C,..., D; et il est constitué par tous les éléments des systèmes désignés par chacun des termes de la suite de paroles A, B, C,...,D.

Les désignations que nous venons de définir s'appliquent sans restriction au cas où chacun des systèmes se réduit à un seul phénomène.

Une somme de phénomènes :

$$a + b + c + \dots + d$$

désignera donc un système défini qui s'appellera le système total des phénomènes *a*, *b*, *c*,..., *d*, ou plus simplement le système des phénomènes *a*, *b*, *c*,..., *d*.

Quand des éléments d'un système S, peuvent se distinguer des autres éléments de ce système par un caractère commun que les autres n'ont pas, les uns constituent un système partiel A, les autres un système partiel B, et S est le système total de A et de B.

La somme des systèmes A et B désignera donc le même système que S.

Or, nous pourrons toujours choisir l'un après l'autre des éléments d'un système A, et par ces opérations successives nous attribuerons à des éléments de A un caractère commun que n'ont pas les autres éléments de A.

On pourra donc toujours par ce moyen décomposer un système S en une somme de deux systèmes A et B constitués, l'un par des éléments choisis arbitrairement dans le système S, l'autre par les éléments de S qui n'ont pas fait l'objet d'un choix.

Systèmes finis. — Quand par une suite de choix portant chaque fois sur un des éléments d'un système S n'ayant pas

fait l'objet d'un des choix précédents, on pourra parvenir à choisir tous les éléments de S, ce système sera dit un *système fini.*

Équivalence de désignations. — Quand deux expressions algébriques, et en particulier deux sommes, désigneront le même système, on dira de l'une quelconque de ces expressions qu'elle est *équivalente* ou qu'elle *équivaut* à l'autre.

L'expression formée par deux désignations de systèmes séparées l'une de l'autre par les mots « équivalent à » s'appelle une *équivalence* de systèmes.

Il résulte immédiatement de cette définition, que l'équivalence de désignations de systèmes est réflexe, symétrique et transitive, comme l'identité de phénomènes.

Si deux désignations du même système peuvent s'écrire, l'équivalence formée par ces expressions s'écrira en traçant les signes graphiques qui les représentent à la suite l'un de l'autre sur une même ligne droite, en les séparant l'un de l'autre par le signe $\langle\,\rangle$

Propriétés de la somme de systèmes. Associativité.

Les sommes de systèmes :

$$(A + B) + C \tag{1}$$

et

$$A + (B + C) \tag{2}$$

désignent par définition, l'une le système total du système A+B et du système C, l'autre le système total du système A et du système B+C.

Tout élément de (1) est un élément de A+B ou de C. S'il est un élément de A+B, il fait partie de A ou de B, et par suite il fait partie d'un des deux systèmes partiels A ou B+C de (2), et par suite du système (2).

Si un élément de (1) n'est pas un élément de A+B, il est un élément de C, et fait partie du système partiel B+C de (2), et par suite de (2).

Tout élément de (1) fait donc partie de (2). On voit de même que tout élément de (2) fait partie de (1).

Les sommes (1) et (2) désignent donc des systèmes constitués par les mêmes éléments. Ce sont deux désignations équivalentes d'un même système. On a donc l'équivalence :

$$(A+B)+C \lessgtr A+(B+C) \tag{3}$$

quels que soient les systèmes désignés par les caractères A, B, C.

On a par définition :

$$A+B+C \lessgtr (A+B)+C, \tag{4}$$

d'où, en vertu de la transitivité de l'équivalence

$$A+B+C \lessgtr A+(B+C). \tag{5}$$

La propriété d'une somme de systèmes caractérisée par les équivalences (3), (4), (5) s'exprime ordinairement sous la forme suivante.

Théorème VIII. — Dans une somme de systèmes A+B+C, on peut associer les deux premiers ou les deux derniers termes sans changer le système qu'elle désigne.

Cette propriété des sommes de systèmes s'appelle la propriété *associative*. Elle est susceptible d'être étendue à un nombre quelconque de termes consécutifs d'une somme quelconque de systèmes.

Théorème IX. — Dans toute somme de systèmes, on peut associer deux termes consécutifs quelconques, c'est-à-dire que les deux sommes :

$$A+B+\ldots+L+M+N+P+\ldots+R+S$$
$$A+B+\ldots+L+(M+N)+P+\ldots+R+S$$

désignent le même système, quels que soient les systèmes désignés par les caractères de ces deux sommes.

Les sommes :

$$A + B + \ldots + L + M \qquad (1)$$
$$(A + B + \ldots + L) + M \qquad (2)$$

désignent par définition le même système.

Si on ajoute un terme N à chacune d'elles, on a les sommes équivalentes (3) et (4) :

$$[A + B + \ldots + L + M] + N \qquad (3)$$
$$[(A + B + \ldots + L) + M] + N. \qquad (4)$$

Mais on a eu par définition :

$$[A + B + \ldots + L + M] + N \langle\ \rangle A + B + \ldots + L + M + N$$

et en vertu du théorème VIII :

$$[(A + B + \ldots + L) + M] + N \langle\ \rangle (A + B + \ldots + L) + (M + N).$$

De l'équivalence des premiers membres, il résulte, en vertu de la transitivité, que les deux derniers membres sont équivalents, ce qui s'exprime :

$$A + B + \ldots + L + M + N \langle\ \rangle (A + B + \ldots + L) + (M + N).$$

On a par définition :

$$(A + B + \ldots + L) + (M + N) \langle\ \rangle A + B + \ldots + L + (M + N);$$

d'où :

$$A + B + \ldots + L + M + N \langle\ \rangle A + B + \ldots + L + (M + N);$$

d'où :

$$A + B + \ldots + L + M + N + P + \ldots + R + S \langle\ \rangle A + B + \ldots + L + (M + N) + P + \ldots + R + S.$$

On déduit aisément de ce théorème la proposition générale suivante :

Théorème X. — On peut associer ensemble un nombre quel-

conque de termes consécutifs d'une somme de systèmes sans changer le système qu'elle désigne.

Commutativité. — Lorsque deux termes quelconques d'une somme peuvent être permutés sans changer le sens conventionnel attribué à la somme, on exprime ce fait en disant que cette somme est *commutative*.

Nous allons démontrer que toute somme de systèmes est commutative.

Commutativité des sommes de systèmes. — Il résulte de la définition des sommes de systèmes, qu'on peut toujours permuter les deux termes d'une somme de deux systèmes sans changer le système désigné par la somme de ces termes; c'est-à-dire qu'on a l'équivalence :

$$A + B \langle\ \rangle B + A \tag{1}$$

quels que soient les systèmes désignés par A et par B.

Dans toute somme de systèmes constituée par un terme initial, un terme final et un seul terme intermédiaire, on peut permuter le terme initial et le terme final sans changer le système désigné par la somme de ces termes; c'est-à-dire qu'on a l'équivalence de systèmes :

$$X + M + Y \langle\ \rangle Y + M + X \tag{2}$$

quels que soient les systèmes désignés par X, Y et M.

En effet, on a successivement d'après (1) les équivalences :

$$X + (M + Y) \langle\ \rangle X + (Y + M)$$
$$X + (Y + M) \langle\ \rangle (Y + M) + X.$$

Il en résulte, d'après la transitivité des équivalences de systèmes :

$$X + (M + Y) \langle\ \rangle (Y + M) + X.$$

D'où, en vertu de l'associativité des termes consécutifs d'une somme de systèmes, il résulte :

$$X+M+Y<\,>Y+M+X;$$

ce qu'il fallait établir.

Nous allons démontrer que dans une somme quelconque de systèmes :

$$A+..+B+X+C+..+D+Y+F+..+G,$$

deux termes quelconques X et Y peuvent être permutés sans changer le système désigné par la somme.

En effet, on a, à cause de l'associativité des termes consécutifs de toute somme de systèmes :

$$A+..+B+X+C+..+D+Y+F+..+G<\,>A$$
$$+..+B+[X+(C+..+D)+Y]+F+..+G.$$

Il résulte de l'équivalence (2) qu'on a :

$$X+(C+..+D)+Y<\,>Y+(C+..+D)+X.$$

On en déduit :

$$A+..+B+X+C+..+D+Y+F+..+G<\,>A$$
$$+..+B+[Y+(C+..+D)+X]+F+..+G.$$

Or, on a par association de termes consécutifs d'une somme de systèmes :

$$A+..+B+Y+C+..+D+X+F+..+G<\,>A$$
$$+..+B+[Y+(C+..+D)+X]+F+..+G.$$

Il résulte de la transitivité des équivalences de systèmes que les deux dernières équivalences entraînent la suivante :

$$A+..+B+X+C+..+D+Y+F+..+G<\,>A$$
$$+..+B+Y+C+..+D+X+F+..+G.$$

Ainsi se trouve établie la proposition suivante :

Théorème XI. — Dans toute somme de systèmes, on peut

permuter deux termes quelconques sans changer le système désigné par la somme.

III

CORRESPONDANCE DE DEUX SYSTÈMES INFÉRIORITÉ, SUPÉRIORITÉ D'UN SYSTÈME SUR UN AUTRE

COUPLES. — Il résulte immédiatement des principes sur lesquels reposent le choix et l'association des phénomènes de la conscience, que l'homme a la faculté de choisir à son gré n'importe quel élément d'un système S, et n'importe quel élément d'un système S′, pour les associer l'un à l'autre.

DÉFINITIONS. — L'association d'un élément *a* d'un système S et d'un élément *a′* d'un système S′ établit une relation entre ces deux éléments de S et de S′; et on exprime ce fait en disant que l'association d'un élément *a* d'un système S et d'un élément *a′* d'un système S′ fait *correspondre* l'un à l'autre ces deux éléments de S et de S′.

Les deux éléments de S et de S′ que l'on fait ainsi correspondre l'un à l'autre sont dits deux *éléments correspondants* de S et de S′.

Deux phénomènes associés l'un à l'autre sont dits aussi *accouplés* l'un à l'autre; et le système constitué par deux phénomènes associés l'un à l'autre est dit un *couple* de phénomènes.

CONSTITUTION DES SYSTÈMES DE CORRESPONDANCE. — L'homme peut donc toujours constituer un couple d'éléments de deux systèmes S et S′, en choisissant arbitrairement pour les accoupler l'un à l'autre, un élément de S et un élément de S′; et lorsqu'il aura constitué ce couple, il pourra en constituer un autre, formé par un élément de S et un élément de S′, qui ne fassent ni l'un ni l'autre partie du couple précédent.

Il pourra continuer à constituer l'un après l'autre des couples d'éléments de S et de S′ formés chacun par un élément

de S et de S′ choisis parmi ceux qui ne font pas partie des couples précédents.

Il pourra, dans ces conditions, faire succéder un couple à un autre, tant qu'il y aura dans chacun des systèmes S et S′ un élément qui n'ait pas été choisi pour former les couples précédents.

De quelque façon qu'on applique ce mode de génération d'un système T de couples d'éléments de deux systèmes S et S′, chacun des couples de T sera constitué par un élémen de S et un élément de S′, ne faisant partie d'aucun autre couple du système T.

Les termes d'une telle suite de couples ne feront correspondre un élément d'un quelconque des systèmes S et S′ qu'à un seul élément de l'autre système.

Dénominations des divers systèmes de correspondance. — Lorsque des couples d'éléments de deux systèmes S et S′ ne font correspondre à un élément quelconque d'un de ces systèmes qu'un seul élément de l'autre, ce système de couples est dit un *système de correspondance* d'éléments de S et de S′.

Ce système de correspondance est dit *partiel* ou *complet* : *complet*, si tout élément de l'un quelconque de ces systèmes S et S′ fait partie d'un des couples du système de correspondance, *partiel*, s'il ne fait correspondre qu'une partie des éléments de l'un des systèmes S et S′ à des éléments de l'autre.

Théorème XII. — Si deux systèmes S et S′ sont finis, ou si l'un d'eux seulement est fini, on pourra toujours établir un système complet de correspondance entre tous les éléments de l'un de ces systèmes, et la totalité ou une partie des éléments de l'autre.

Démonstration. — Les couples que l'on peut toujours constituer les uns après les autres, en choisissant pour former chacun d'eux un élément d'un système S et un élément d'un système S′ qui ne fassent ni l'un ni l'autre partie

des couples précédents, formeront un système de correspondance d'éléments de S et de S′.

Si après avoir constitué un système de correspondance d'éléments de deux systèmes S et S′, il y a encore des éléments de S et des éléments de S′ qui ne fassent partie d'aucun des couples du système de correspondance, nous pourrons toujours constituer avec deux de ces éléments choisis, l'un dans S, l'autre dans S′, un nouveau couple qui, avec les couples déjà constitués, formera un nouveau système de correspondance d'éléments de S et de S′.

Lorsqu'on constitue ainsi un nouveau système de correspondance, on choisit dans chacun des systèmes S et S′ un élément qui n'a pas encore fait l'objet d'un choix.

Si les deux systèmes S et S′ sont finis, ou si l'un d'eux seulement est fini, on parviendra, en continuant à former ainsi successivement de nouveaux systèmes de correspondance, à introduire parmi les couples d'un système final de correspondance, tous les éléments de S ou tous les éléments de S′.

On pourra donc toujours former un système complet de correspondance entre tous les éléments de l'un de ces deux systèmes S et S′, et la totalité ou une partie des éléments de l'autre.

Remarque. — Si le système S est fini et que le système S′ ne soit pas fini, on pourra former, par le procédé que nous venons de décrire, un système complet de correspondance entre tous les éléments de S et une partie des éléments de S′, car on pourra choisir successivement tous les éléments du système fini S pour associer chacun d'eux à un élément distinct du système S′ qui n'est pas fini, et dont les éléments ne seront jamais tous choisis pour les associer à des éléments de S.

Définition de la correspondance de deux systèmes, de l'infériorité et de la supériorité d'un système sur un autre.

— Si on peut établir un système complet de correspondance entre les éléments de deux systèmes S et S', on exprime ce fait en disant que les systèmes S et S' sont *correspondants*. On exprime aussi le même fait en disant que S *correspond* à S' ou que S' correspond à S.

Si on peut établir un système complet de correspondance entre tous les éléments d'un système S et une partie des éléments d'un système S', on exprime ce fait en disant que S est *inférieur* à S', ou que S' est *supérieur* à S.

Ces définitions nous permettent d'exprimer le théorème XII sous la forme suivante :

Théorème XII *bis*. — Si deux systèmes S et S' sont finis ou si l'un d'eux seulement est fini, ces deux systèmes sont correspondants, ou l'un d'eux est inférieur à l'autre.

Remarque. — Tout système fini est inférieur à n'importe quel système non fini.

Car, nous avons fait remarquer après la démonstration du théorème XII, que si un système S est fini, et un système S' n'est pas fini, on peut toujours établir un système complet de correspondance entre tous les éléments de S et une partie des éléments de S'.

Théorème XIII. — Si deux systèmes S et S' sont constitués chacun par deux éléments, on peut toujours établir deux systèmes complets de correspondance entre leurs éléments.

Démonstration. — Si on désigne par a et b les éléments de S, et par a' et b' les éléments de S' définis par les équivalences :

$$S \langle\ \rangle a + b \qquad S' \langle\ \rangle a' + b'$$

on pourra toujours établir un système complet de correspondance entre les éléments de S et de S', en constituant d'abord un couple avec un des deux éléments de S, et un des deux élé-

ments de S′, puis un autre couple avec l'autre élément de S et l'autre élément de S′.

Cette manière d'établir un système de correspondance entre les systèmes S et S′ pourra donner l'un ou l'autre des systèmes de couples :

$$(a+a')+(b+b') \text{ ou } (a+b')+(b+a')$$

qui établiront deux modes de correspondance distincts entre les éléments de S et de S′, puisque dans l'un a correspond à a', tandis que dans l'autre a correspond à b'.

Théorème XIV. — Si deux systèmes S et S′ sont correspondants, et que l'un d'eux se réduise à un élément, l'autre se réduit aussi à un élément.

En effet, si le système S se réduit à un seul élément, on ne peut faire correspondre les divers éléments de S′ qu'à l'unique élément a de S. Si donc le système S′ est formé de plusieurs éléments, chacun de ces éléments ne pourra correspondre à un élément distinct de S, et les systèmes S et S′ ne seront pas correspondants.

Donc, pour que S′ soit correspondant à S, il faut et il suffit qu'il se réduise aussi à un seul élément.

Théorème XV. — Si deux systèmes S et S′ sont correspondants, on peut toujours établir entre les éléments de S et de S′ un système complet de correspondance, dans lequel un élément m arbitrairement choisi dans S, et un élément n' arbitrairement choisi dans S′, soient des éléments correspondants.

Démonstration. — On peut par hypothèse établir un système T complet de correspondance entre les éléments de S et de S′. Dans ce système de correspondance, l'élément m de S correspond à un élément m' de S′, et l'élément n' de S′ correspond à un élément n de S.

Les systèmes S et S′ sont constitués, l'un par les éléments

du système $m + n$ et par les éléments du système P défini par l'équivalence :

$$S \langle\,\rangle (m + n) + P,$$

l'autre par les éléments du système $m' + n'$ et par les éléments d'un système P′ défini par l'équivalence :

$$S' \langle\,\rangle (m' + n') + P'.$$

Le système T de correspondance de S et de S′ est constitué par les deux couples $m + m'$ et $n + n'$ d'un système U défini par l'équivalence :

$$U \langle\,\rangle (m + m') + (n + n')$$

et par les couples d'un système W défini par l'équivalence :

$$T \langle\,\rangle U + W.$$

Les couples de T font correspondre les éléments de S et de S′ Les couples du système partiel U de T font correspondre les éléments de $m + n$ avec ceux de $m' + n'$. Les couples de l'autre système partiel W de T font correspondre les autres éléments de S avec les autres éléments de S′; c'est-à-dire qu'ils font correspondre les éléments de P et ceux de P′.

Les systèmes P et P′ sont donc correspondants.

Les couples du système :

$$U \langle\,\rangle (m + m') + (n + n')$$

font correspondre les éléments des systèmes :

$$m + n, \qquad m' + n'.$$

Mais ces deux systèmes peuvent correspondre au moyen d'un système V défini par l'équivalence :

$$V \langle\,\rangle (m + n') + (n + m').$$

Le système de couples :

$$V + W$$

fait correspondre les éléments de $(m + n)$ avec ceux de $(m' + n')$ et ceux de P avec ceux de P'.

Il fait donc correspondre tous les éléments de S avec ceux de S', et dans le système V + W, un des couples est formé par les éléments m et n' choisis, l'un arbitrairement dans S, l'autre arbitrairement dans S'.

Il résulte immédiatement de cette démonstration la proposition suivante :

Corollaire. — Si l'on choisit arbitrairement un élément a dans un système A et un élément a' dans un système A', les systèmes B et B' définis par les équivalences :

$$A \langle\,\rangle a + B \qquad A' \langle\,\rangle a' + B'$$

sont correspondants ou ne sont pas correspondants, selon que A et A' sont ou ne sont pas des systèmes correspondants.

Théorème XVI. — Si on établit un système partiel T de correspondance entre les éléments de deux systèmes correspondants A et A', les éléments de A et de A' qui ne font pas partie des couples de T constituent deux systèmes correspondants.

Démonstration. — Si nous désignons par les petites lettres $a, b, \ldots, l, m, n, \ldots, r$ les éléments de A qui font partie des couples de T, et par la même petite lettre accentuée chaque élément de A' que T fait correspondre à un élément de A, le système T pourra être désigné par la somme de couples d'éléments de A et de A' :

$$(a + a') + (b + b') + \ldots. + (l + l') + (m + m') + (n + n') + \ldots\ldots + (r + r'). \qquad (1)$$

Les éléments de A qui ne font pas partie du premier couple de la somme (1) et les éléments de A' qui ne font pas partie de ce premier couple constituent deux systèmes B et B' qui sont correspondants, car les désignations employées étant liées par les équivalences :

$$A \langle\,\rangle a + B \qquad A' \langle\,\rangle a' + B'$$

dans lesquelles A et A′ désignent des systèmes correspondants, il résulte du corollaire précédent que B et B′ désignent aussi des systèmes correspondants.

Le théorème est donc vrai pour un système de correspondance :

$$T_a \langle\,\rangle (a + a').$$

On démontre d'une façon générale que s'il est vrai pour un système de correspondance :

$$T_m \langle\,\rangle (a + a') + (b + b') + \ldots\ldots + (l + l') + (m + m')$$

défini par la somme des termes de (1) depuis le premier jusqu'au terme $(m + m')$, il est vrai pour le système T_n défini par l'équivalence :

$$T_n \langle\,\rangle T_m + (n + n')$$

formé par la somme des termes de (1) depuis le premier jusqu'au terme $n + n'$ qui suit $m + m'$.

En effet, si les éléments de A et de A′ qui ne font pas partie des couples de T_m, constituent deux systèmes correspondants M et M′, les systèmes N et N′ constitués par les éléments de A et de A′ qui ne font pas partie des couples de T_n, sont aussi des systèmes correspondants, en vertu du corollaire du théorème XV, car ces désignations sont liées par les équivalences :

$$M \langle\,\rangle n + N \qquad M' \langle\,\rangle n' + N'.$$

Le théorème vrai pour le système de correspondance :

$$T_a \langle\,\rangle (a + a')$$

est vrai pour :

$$T_b \langle\,\rangle (a + a') + (b + b'),$$

et ainsi de suite, jusqu'au système T.

$$T \langle\,\rangle (a + a') + (b + b') + \ldots\ldots + (l + l') + (m + m') + (n + n') + \ldots\ldots + (r + r').$$

Le théorème est donc vrai pour un système T quelconque de correspondance entre les éléments de A et de A′.

Théorème XVI *bis*. — Si deux systèmes S et S′ sont correspondants, et si un système partiel A de S est correspondant à un système partiel A′ de S′, les systèmes partiels B de S et B′ de S′ définis par les équivalences :

$$S \langle\,\rangle A + B \qquad S' \langle\,\rangle A' + B'$$

sont aussi correspondants.

En effet, un système complet de correspondance T peut, par hypothèse, être établi entre les éléments de A et de A′, c'est-à-dire entre les éléments de S et de S′ qui ne font partie ni de B, ni de B′.

Les systèmes S et S′ étant correspondants par hypothèse, et les systèmes B et B′ étant constitués par les éléments de S et de S′ qui ne font pas partie des couples de T, sont donc correspondants, en vertu du théorème précédent.

Corollaire I. — Si des systèmes S et S′ sont correspondants, aucun d'eux n'est inférieur ou supérieur à l'autre.

Démonstration. — En effet, si tout élément d'un système S fait partie d'un système T de correspondance d'éléments des systèmes correspondants S et S′, un élément *a* de S fera partie d'un couple de T et les éléments du système A défini par l'équivalence :

$$S \langle\,\rangle A + a$$

feront partie des autres couples de T.

Si en outre nous désignons par *a′* l'élément de S′ qui fait partie du même couple de T que *a* et par A′ le système constitué par les éléments de S′ qui font partie des autres couples de T, le système T est un système complet de correspondance des sommes $A + a$ et $A' + a'$. Ces deux sommes désignent donc des systèmes correspondants, et il résulte du théorème XV que les termes A et A′ de ces deux sommes désignent aussi des systèmes correspondants.

Le système B′ défini par l'équivalence :

$$S' \langle\, \rangle A' + B'$$

et le système *a* défini par l'équivalence :

$$S \langle\, \rangle A + a$$

désignent des systèmes correspondants, en vertu du théorème XVI, car les sommes A′ + B′ et A + *a* sont correspondantes par hypothèse et les parties A et A′ par démonstration.

Comme l'un de ces deux systèmes correspondants se réduit à un seul élément *a*, l'autre système B′ se réduit aussi au seul élément *a*′ qui fait partie de B′, en sorte que l'on a l'équivalence :

$$A' + B' \langle\, \rangle A' + a'.$$

Le système T, qui est un système complet de correspondance des systèmes A + *a*, et A′ + *a*′, est donc un système complet de correspondance des systèmes A + *a* et A′ + B′, c'est-à-dire des systèmes S et S′.

Donc un système de correspondance d'éléments de deux systèmes correspondants S et S′ ne peut jamais faire correspondre tous les éléments de l'un d'eux à une partie seulement des éléments de l'autre, ce qui s'exprime en disant qu'aucun de ces deux systèmes n'est inférieur ou supérieur à l'autre.

Corollaire II. — Si l'un des systèmes S et S′ est inférieur ou supérieur à l'autre, ces systèmes ne sont pas correspondants.

En effet, si ces deux systèmes étaient correspondants, aucun d'eux ne pourrait, d'après le corollaire précédent, être inférieur ou supérieur à l'autre, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Corollaire III. — Si A et A′ désignent des systèmes correspondants, et si B désigne un système n'ayant aucun élément

commun avec A, la somme A + B désigne un système supérieur à A'.

Car le système complet de correspondance T qu'on peut établir entre les éléments de A et de A', est un système complet de correspondance entre une partie des éléments de la somme A + B, et la totalité des éléments de A'.

Corollaire IV. — Si un système S est inférieur à un système S', le système S est le seul des deux qui soit inférieur à l'autre, et le système S' est le seul des deux qui soit supérieur à l'autre.

En effet, on peut, par hypothèse, établir un système complet de correspondance entre tous les éléments du système S et une partie des éléments du système S', et, par conséquent, on ne peut pas établir de système complet de correspondance entre tous les éléments de S' et une partie des éléments de S; car si on peut établir un système complet de correspondance entre les éléments de S, et une partie P' des éléments de S', une partie quelconque M de S correspondra à une partie R' de P', c'est-à-dire à une partie R' de S'.

Le système M correspondant à une partie seulement de S', les systèmes M et S' ne sont pas correspondants, conformément au corollaire II du théorème XVI.

Aucun système partiel M de S ne peut donc correspondre au système S' lorsque S est inférieur à S'.

Théorème XVII. — Si l'on choisit un système S, tout système S' est correspondant, inférieur ou supérieur à S, et il ne jouit que d'une seule de ces propriétés à l'exclusion des deux autres.

En effet, on peut toujours, d'après le théorème XII, établir un système complet de correspondance ou entre tous les éléments de S et tous les éléments de S', ou entre tous les éléments de l'un des deux systèmes S et S' et une partie des éléments de l'autre.

Dans un cas, le système S′ jouit de la propriété d'être correspondant à S.

Dans l'autre cas, le système S′ jouit de la propriété d'être inférieur ou d'être supérieur au système S.

Tout système S′ est donc correspondant, inférieur ou supérieur à un système donné S.

Si S′ est correspondant à S, il résulte du corollaire I du théorème XVI que S′ n'est ni inférieur, ni supérieur à S.

Si S′ est inférieur à S, il résulte du corollaire IV du théorème XVI que S′ n'est pas supérieur à S et il résulte du corollaire II du théorème XVI que S′ n'est pas correspondant à S.

Si S′ est supérieur à S, il résulte du même théorème que S′ n'est pas inférieur à S et qu'il n'est pas correspondant à S.

On peut donc dire que tout système S′ est ou correspondant ou inférieur, ou supérieur à un système donné S, et qu'il jouit de l'une de ces propriétés à l'exclusion des deux autres.

On peut donc énoncer la proposition suivante:

Tout système S partage tous les systèmes possibles en trois catégories formées l'une par tous les systèmes correspondants à S, une autre par tous les systèmes inférieurs à S, et encore une autre par tous les systèmes supérieurs à S.

Théorème XVIII. — Lorsque deux systèmes sont correspondants, tout système partiel de l'un de ces deux systèmes est inférieur à l'autre système.

Démonstration. — Désignons par A un système partiel d'un système S. On peut toujours trouver un système B n'ayant aucun élément commun avec A et défini par l'équivalence:

$$A + B \langle\, \rangle S$$

Désignons par D un système correspondant à S.

On pourra toujours former un système complet de corres-

pondance entre les éléments de S et de D, c'est-à-dire de A + B et de D.

Cela signifie qu'on pourra toujours former un système T de couples constitués chacun par l'association d'un élément de A + B et d'un élément de D, et tel que tout élément de A + B et de D fasse partie d'un couple de T, et ne fasse partie que d'un seul couple de T.

Tout couple de T sera donc constitué par l'association d'un élément de A ou de B à un élément de D. Les couples de T constitués par l'association d'un élément de A à un élément de D. formeront un système U, et les couples de T constitués par l'association d'un élément de B à un élément de D formeront un système V. Le système T, formé par tous les couples de U et de V est équivalent à la somme U + V, ce qui s'écrit :

$$T \langle\, \rangle U + V.$$

Tout couple de U est formé par l'association d'un élément de A et d'un élément de D.

Tout élément *a* de A ne peut faire partie que d'un seul couple de U, car U est un système partiel de T et *a* ne fait partie que d'un seul couple de T.

On voit de même que tout élément de D ne peut faire partie que d'un seul couple de U.

Le système U est donc un système de correspondance d'éléments de A et de D.

Tout élément *a* de A fait partie d'un couple de T et par suite d'un couple de U, car T est un système complet de correspondance des éléments des systèmes (A + B) et D, et tout couple de T constitué par un élément de A et un élément de D fait partie de U.

Tout couple de U est un couple de T, mais tout couple de T n'est pas un couple de U; car tout couple de U est constitué par l'association d'un élément de A à un élément de D, tandis que tout couple de T est constitué par l'association

d'un élément de A ou de B à un élément de D, et que tout élément *b* de B constitue, avec un élément *d* de D, un couple de T qui ne fait pas partie de U.

Cet élément *d* de D, qui constitue avec l'élément *b* de B un couple de T qui ne fait pas partie de U, ne fait lui-même partie d'aucun autre couple de T, et par conséquent d'aucun couple de U.

Tout élément de D ne fait donc pas partie d'un couple de U. Or, nous avons montré que tout élément de A fait partie d'un couple de U.

Le système U est donc un système complet de correspondance entre tous les éléments de A et une partie des éléments de D : ce qui s'exprime en disant que le système A est inférieur au système D.

Tout système partiel A d'un système quelconque S est donc inférieur à tout système D correspondant à S.

Reflexité, symétricité, transitivité de la correspondance de systèmes. — Si nous adoptons les notations [=], [<], [>] pour désigner les mots : correspondant à, inférieur à, supérieur à, et les grandes lettres de l'alphabet pour désigner les systèmes, les expressions algébriques : A correspondant à B, A inférieur à B, A supérieur à B, dans lesquelles A et B désignent des systèmes, peuvent s'écrire :

A [=] B A [<] B A [>] B.

La première de ces expressions formée par deux lettres qui désignent chacune un système, séparées l'une de l'autre par l'expression : correspondant à, est dite une correspondance de systèmes.

La correspondance de systèmes est réflexe, symétrique et transitive, c'est-à-dire :

1° Un système A est correspondant à ce même système A, ce qui s'exprime encore en disant que la correspondance de systèmes A [=] A existe toujours, quel que soit le système désigné par A.

2° Si un système A est correspondant à un système B, il en résulte que le système B est correspondant au système A, ce qui s'exprime en disant que de la correspondance A [=] B il résulte toujours la correspondance B [=] A.

Ces deux premières propriétés des correspondances de systèmes résultent directement de la définition des systèmes correspondants.

3° Si un système A correspond à un système B, et si le système B correspond à un système C, il en résulte que A correspond à C, ce qui s'exprime encore en disant que les correspondances de systèmes :

A [=]B et B [=] C entraînent A [=] C.

En effet, tout élément *a* de A correspond à un élément *b* de B, et cet élément *b* de B correspond à un élément *c* de C.

Si donc on choisit successivement chaque élément de A pour l'associer à l'élément de C qui correspond au même élément de B, on établira un système complet de correspondance entre les éléments de A et de C.

D'après le mode même d'établissement de ce système, tout élément de A fait partie d'un couple et d'un seul du système. Tout élément *c* de C fait aussi partie d'un couple et d'un seul du système ; car tout élément *c* de C correspond à un seul élément *b* de B, lequel correspond à un seul élément *a* de A. Il y a donc dans le système A un élément *a* et un seul qui corresponde au même élément de B que l'élément *c* de C, et par suite *c* fait partie d'un et d'un seul des couples formés en associant chaque élément de A à l'élément de C qui correspond au même élément de B.

Les corollaires suivants sont la conséquence des trois propriétés fondamentales de la correspondance de systèmes.

Ils peuvent s'énoncer dans le langage symbolique que nous avons adopté et s'écrire avec les notations que nous venons de choisir.

Ils forment les quatre propositions suivantes :

1° Si un système A correspond à un système B, et que B soit inférieur à un système C, il en résulte que A est inférieur à C, ce qui s'exprime encore et s'écrit :

$$A\ [=]\ B \text{ et } B\ [<]\ C \text{ entraînent } A\ [<]\ C,$$

car si B est inférieur à C, on peut par définition former un système partiel C′ de C tel que B soit correspondant à C′, ce qui s'écrit :

$$B\ [=]\ C'.$$

On a donc par hypothèse :

$$A\ [=]\ B \text{ et } B\ [=]\ C',$$

d'où, en vertu de la transitivité des correspondances de systèmes, il résulte :

$$A\ [=]\ C',$$

A étant correspondant à un système partiel C′ de C, le système A est par définition inférieur à C, ce qui s'écrit :

$$A\ [<]\ C;$$

ce qu'il fallait établir.

2° Si un système A est inférieur à un système B, et si B est correspondant à un système C, il en résulte que le système A est inférieur au système C ; c'est-à-dire que :

$$A\ [<]\ B \text{ et } B\ [=]\ C \text{ entraînent } A\ [<]\ C.$$

En effet, A [<] B exprime, par définition de l'infériorité d'un système sur un autre, que A est correspondant à un système B′ partiel de B. On a donc :

$$A\ [=]\ B'$$

B′ étant un système partiel de B et B étant correspondant à C, il résulte du théorème XVIII que B′ est inférieur à C, ce qui s'exprime :

$$B'\ [<]\ C$$

De A [=] B′ et de B′ [<] C il résulte, en vertu du corollaire précédent :

$$A\ [<]\ C;$$

ce qu'il fallait établir.

3° Si un système A est inférieur à un système B et que B soit inférieur à un système C, il en résulte que A est inférieur à C, ce qui s'écrit :

$$A\ [<]\ B \text{ et } B\ [<]\ C \text{ entraînent } A\ [<]\ C,$$

car on peut former un système B′ partiel de B et un système C′ partiel de C tels que A soit correspondant à B′ et B à C′, c'est-à-dire tels que :

$$A\ [=]\ B' \text{ et } B\ [=]\ C'$$

B′ étant un système partiel de B, il résulte du théorème XVIII que B [=] C′ entraîne :

$$B'\ [<]\ C'.$$

De cette correspondance et de :

$$A\ [=]\ B'$$

il résulte, d'après le théorème précédent :

$$A\ [<]\ C'$$

A correspond donc à un système C″ partiel de C′, et par suite partiel de C, ce qui s'exprime :

$$A\ [<]\ C;$$

ce qu'il fallait établir.

4° Si un système A est inférieur à un système B, il en résulte que le système A + C est inférieur au système B + C, ce qui s'écrit :

$$A\ [<]\ B \text{ entraîne } A + C\ [<]\ B + C$$

car la première de ces deux expressions signifie qu'on peut

former un système partiel B′ de B, tel que A soit correspondant à B′, ce qui s'écrit :

$$A\ [=]\ B'.$$

Il en résulte que A + C est correspondant à B′ + C, ce qui s'écrit :

$$A + C\ [=]\ B' + C.$$

Un système B′ + C est toujours correspondant à lui-même. Or, B′ + C est un système partiel de B + C ; donc il est correspondant à une partie B′ + C de B + C, ce qui s'exprime en disant que B′ + C est inférieur à B + C, et ce qui s'écrit :

$$B' + C\ [<]\ B + C.$$

De ces deux dernières expressions algébriques, il résulte, en vertu du corollaire 1° :

$$A + C\ [<]\ B + C,$$

c'est-à-dire que A + C est inférieur à B + C, ce qu'il fallait établir.

Réciproquement, si la somme de systèmes A + C est inférieure à la somme de systèmes B + C, il en résulte que A est inférieur à B, c'est à-dire que :

$$A + C\ [<]\ B + C \text{ entraîne } A\ [<]\ B$$

et si la somme de systèmes A + C est correspondante à la somme de systèmes B + C, il en résulte que A est correspondant à B, c'est-à-dire que :

$$A + C\ [=]\ B + C \text{ entraîne } A\ [=]\ B.$$

En effet, si A + C est inférieur à B + C, le système A ne ne peut être correspondant ou supérieur à B, car il en résulterait, d'après la première partie de ce corollaire :

$$A + C\ [=]\ B + C \text{ ou } A + C\ [>]\ B + C$$

conditions incompatibles l'une et l'autre avec l'hypothèse :

$$A+C\,[<]\,B+C.$$

Le système A ne pouvant dans ce cas être correspondant ou supérieur à B, il en résulte que A est toujours inférieur à B lorsque A + C est inférieur à B + C, c'est-à-dire que :

$$A+C\,[<]\,B+C \text{ entraîne } A\,[<]\,B.$$

On voit de même que si A + C est correspondant à B+C, le système A ne peut être ni inférieur, ni supérieur à B, car il en résulterait, en vertu de la première partie de ce corollaire :

$$A+C\,[<]\,B+C \text{ ou } A+C\,[>]\,B+C,$$

conditions incompatibles l'une et l'autre avec :

$$A+C\,[=]\,B+C.$$

Le système A ne pouvant être inférieur ou supérieur à B lorsque A + C est correspondant à B + C, il en résulte que, dans ce cas, A est toujours correspondant à B, ce qui s'exprime :

$$A+C\,[=]\,B+C \text{ entraîne } A\,[=]\,B.$$

Remarque. — Ce corollaire est restreint au cas où le système C n'a aucun élément commun avec A ni avec B, car les sommes A + C et B + C ne désignent des systèmes que si cette condition est remplie.

On aurait pu convenir qu'un système B est dit inférieur à un système A lorsqu'on peut trouver un système D n'ayant aucun élément commun avec B et tel que la somme B + D soit correspondante à A, au lieu de convenir qu'un système B soit dit inférieur à un système A lorsqu'on peut établir un système complet de correspondance entre tous les éléments de B et une partie de ceux de A.

En effet, on peut démontrer que si deux systèmes A et B

réalisent l'une de ces deux conditions, ils réalisent aussi l'autre.

Nous allons établir ces deux propositions réciproques.

Si on peut trouver un système donné D, n'ayant aucun élément commun avec un système donné B, et tel que la somme B + D soit correspondante à un autre système donné A, le système B est inférieur au système A, ce qui s'exprime encore en disant que de l'équivalence de système B + D [=] A, il résulte B [<] A.

Car B étant un système partiel d'un système B + D correspondant à A, il résulte du théorème XVIII que B est inférieur à A.

Réciproquement, si un système B est inférieur à un système A, on peut toujours trouver un système D n'ayant aucun élément commun avec B et tel que la somme B + D soit correspondante à A, ce qui s'exprime encore en disant que de B [<] A, il résulte B + D [=] A.

Nous établirons d'abord, que si un système B est inférieur à un système A, tous les éléments de A ne feront pas partie de B.

En effet, si tous les éléments d'un système A font partie d'un système B, ce dernier peut être formé, soit par les seuls éléments de A, soit par les éléments de A et par d'autres éléments ne faisant pas partie de A.

Dans le premier cas, B peut aussi être désigné par A; et comme un système est toujours correspondant à lui-même, il en résulte :

A [=] B.

Dans l'autre cas, B peut être désigné par la somme A + D de A et d'un système D formé par les éléments de B qui ne font pas partie de A. Il en résulte :

A + D [=] B;

d'où, en vertu de la proposition directe :

A [<] B.

Dans ces deux cas, A et B sont liés l'un à l'autre par une relation incompatible avec :

$$B\,[<]\,A.$$

Donc, si B [<] A, les éléments de A ne peuvent pas tous faire partie de B; et il y aura toujours des éléments de A qui constitueront un système N n'ayant aucun élément commun avec B.

Nous établirons ensuite, que si un système B est inférieur à un système A, tous les éléments de B pourront faire partie de A.

En effet, nous pourrons toujours choisir deux systèmes B et D n'ayant aucun élément commun, et former un système B + D que nous désignerons par A.

Un système A étant toujours correspondant à lui-même, on a :

$$B + D\,[=]\,A,$$

et il en résulte, en vertu de la proposition directe :

$$B\,[<]\,A.$$

On peut donc toujours former deux systèmes A et B liés par la relation B [<] A, et tels que tous les éléments de B fassent partie de A.

De ces deux démonstrations préliminaires, il résulte que si B [<] A, il pourra arriver soit qu'aucun des éléments de B ne fasse partie de A, soit qu'une partie des éléments de B fasse partie de A, soit enfin que tous les éléments de B fassent partie de A.

Nous allons établir dans chacun de ces cas que si B [<] A, on peut toujours former un système n'ayant aucun élément commun avec B et tel que B + D [=] A.

Dans le premier cas, si B [<] A, on peut établir un système complet de correspondance T entre tous les éléments de B et une partie des éléments de A. Ces éléments de A que le système T fait correspondre aux éléments de B constituent un

système C, et les autres éléments de A constituent un système D.

On peut donc former deux systèmes C et D tels que :

$$B\,[=]\,C \text{ et } C+D \langle\ \rangle A.$$

On en conclut :

$$B+D\,[=]\,C+D\,[=]\,A$$

et par conséquent :

$$B+D\,[=]\,A.$$

D'ailleurs, si D′ est un autre système, tel que $B + D' [=] A$, on en conclut que :

$$B+D'\,[=]\,B+D \text{ d'où } D'\,[=]\,D.$$

Donc, tout système X qui remplit les conditions exprimées par la correspondance :

$$B+X\,[=]\,A$$

pour deux systèmes donnés A et B, est correspondant à tout autre système qui remplit les mêmes conditions avec les mêmes systèmes A et B.

On désigne l'un quelconque de ces systèmes X par l'expression algébrique A-B.

Dans le cas suivant, si on désigne par M le système des éléments de B qui font partie de A, et par B′ le système des éléments de B qui ne font pas partie de A, il y a toujours des éléments de A qui ne font pas partie de M et qui constituent un système A′.

On a donc :

$$B \langle\ \rangle M+B'$$
$$A \langle\ \rangle M+A'$$

M n'ayant aucun élément commun ni avec A′, ni avec B′.

Il en résulte que B [<] A peut s'exprimer :

$$M+B'\,[\langle]\,M+A'$$

Il est établi par un des corollaires précédents que cette expression algébrique entraîne :

$$B' [<] A'$$

dans laquelle A et B′ n'ont aucun élément commun.

Il s'ensuit qu'on peut former un système D n'ayant aucun élément commun avec B′ et tel que :

$$B' + D [=] A'$$

et par suite :

$$M + B' + D [=] M + A'.$$

D'où :

$$B + D [=] A.$$

Dans le dernier cas, c'est-à-dire si tous les éléments de B, font partie de A, il en résulte que A est équivalent à la somme B + D, dans laquelle D désigne un système n'ayant aucun élément commun avec B, puisque A ne peut pas être formé uniquement par les éléments de B lorsque B [<] A.

B + D et A désignant le même système, il en résulte que :

$$B + D [=] A.$$

Dans le cas où tous les éléments de B font partie de A, la relation B [<] A entraîne la relation B + D [=] A, dans laquelle B et D n'ont aucun élément commun.

Donc, dans tous les cas possibles, la relation B [<] A entraîne la relation B + D [=] A, dans laquelle D désigne un système n'ayant aucun élément commun avec B.

Différence de deux systèmes. — Si un système B est inférieur à un système A, il existe un système D tel que la somme B + D soit correspondante à A, c'est-à-dire qu'il existe un système D tel que l'on ait la correspondance :

$$B + D [=] A.$$

D'ailleurs, si D′ est un autre système tel que :

$$B + D' [=] A$$

on en conclut, d'après la transitivité de la correspondance de systèmes :

$$B + D' [=] B + D$$

d'où, en vertu de la réciprocité du corollaire 4°, il résulte :

$$D' [=] D.$$

Donc, tous les systèmes désignés par X qui vérifient avec deux systèmes donnés A et B la correspondance :

$$B + X [=] A$$

sont correspondants entre eux.

On désigne l'un quelconque d'entre eux par A *moins* B, qui s'écrit :

$$A - B$$

A — B est dit la *différence* des systèmes A et B.

IV

RANG DES TERMES DE LA SUITE

Les notions de correspondance de deux systèmes, et d'infériorité ou de supériorité d'un système sur un autre, vont nous permettre de répartir les termes de toutes les suites possibles en trois catégories, telles que tous les termes qui constituent l'une quelconque de ces catégories, jouissent d'une propriété commune incompatible avec la propriété commune qui caractérise les termes d'une quelconque des deux autres catégories.

Pour parvenir à ce but, nous établirons d'abord une convention, qui simplifiera le langage si difficile à manier dans ces questions, sans l'introduction de termes auxquels on a attribué un sens conventionnel.

Convention. — Si les termes non postérieurs à un terme *a* d'une suite S, et les termes non postérieurs à un terme *a'* d'une suite S' constituent deux systèmes correspondants A

et A′, on exprime ce fait en disant que les termes a et a' des suites S et S′ sont des termes de *même rang*.

On exprime aussi le même fait, en disant que a est de même rang que a', ou que a' est de même rang que a.

Si les systèmes A et A′ constitués, l'un par les termes de S non postérieurs à a, l'autre par les termes de S′ non postérieurs à a', ne sont pas des systèmes correspondants, les termes a et a' ne sont pas des termes de même rang, ce qu'on exprime en disant qu'ils sont des termes de *rangs différents*; et le terme a est dit un terme de *rang inférieur* ou de *rang supérieur* au terme a', selon que le système A est inférieur ou supérieur au système A′.

Théorème XIX. — Si l'on choisit un terme a d'une suite S, tout terme a' d'une suite S′ est de même rang que a, ou de rang inférieur à a, ou de rang supérieur à a; et il jouit d'une seule de ces propriétés à l'exclusion des deux autres.

En effet, désignons par A et A′ les systèmes constitués l'un par les termes de S non postérieurs à a, et l'autre par les termes de S′ non postérieurs à a'. Il résulte immédiatement du théorème XVII que le système A′ est correspondant, inférieur ou supérieur à A et qu'il ne jouit que d'une seule de ces propriétés à l'exclusion des deux autres ; cela s'exprime, dans le langage conventionnel que nous venons d'établir en disant : le terme a' de S′ est de même rang que le terme a de S, ou il est de rang inférieur à a, ou il est de rang supérieur à a, et il ne peut jouir que d'une seule de ces propriétés à l'exclusion des deux autres.

Tout terme a d'une suite S partage donc tous les termes des suites en trois catégories constituées, l'une par les termes de même rang que le terme a de S, une autre par les termes de rang inférieur à a, et une autre encore par les termes de rang supérieur à a.

Les termes de l'une quelconque de ces catégories jouissent

d'une propriété commune, qui distingue les éléments qui la constituent des éléments qui constituent les autres catégories ; et cette propriété commune des éléments d'une catégorie est incompatible avec la propriété commune qui caractérise les éléments d'une quelconque des deux autres catégories.

Si nous adoptons les notations $\boxed{\overset{r}{=}}$, $\boxed{\overset{r}{<}}$, $\boxed{\overset{r}{>}}$ pour désigner les mots : de même rang que, de rang inférieur à, de rang supérieur à, et une petite lettre quelconque de l'alphabet pour désigner un terme d'une suite, les expressions algébriques : *a* de même rang que *b*, *a* de rang inférieur à *b*, *a* de de rang supérieur à *b*, dans laquelle *a* et *b* désignent des termes de suites de phénomènes peuvent s'écrire :

$$a \boxed{\overset{r}{=}} b \qquad a \boxed{\overset{r}{<}} b \qquad a \boxed{\overset{r}{>}} b.$$

La première de ces expressions, formée de deux lettres qui désignent chacune un terme d'une suite, séparées l'une de l'autre par l'expression *de même rang que*, est dite une identité de rang. Les deux autres expressions sont dites des différences de rang.

Il résulte immédiatement des définitions données au début de ce paragraphe IV, que l'identité de rang est réflexe, symétrique et transitive, c'est-à-dire :

1° Un terme *a* d'une suite est de même rang que le même terme *a* de cette suite, ce qui s'exprime encore en disant que l'identité de rang $a \boxed{\overset{r}{=}} a$ existe toujours quand *a* désigne un terme quelconque de n'importe quelle suite de phénomènes.

2° Si un terme *a* d'une suite est de même rang qu'un terme *b* d'une autre suite, il en résulte que *b* est de même rang que *a*, ce qui s'exprime en disant que de l'identité de rang $a \boxed{\overset{r}{=}} b$, il résulte l'identité de rang $b \boxed{\overset{r}{=}} a$.

3° Si un terme *a* d'une suite est de même rang qu'un

terme *b* d'une suite, et que ce terme *b* soit de même rang qu'un terme *c*, il en résulte que *a* est de même rang que *c*, ce qui s'exprime en disant que les identités de rang $a \boxed{\overset{r}{=}} b$, $b \boxed{\overset{r}{=}} c$ entraînent l'identité de rang $a \boxed{\overset{r}{=}} c$.

Il résulte encore des définitions et de ces propositions fondamentales les deux corollaires suivants :

1° Si *a* est de même rang que *b* et que *b* soit de rang inférieur à *c*, il en résulte que *a* est de rang inférieur à *c*, ce qui s'exprime encore :

$$a \boxed{\overset{r}{=}} b \text{ et } b \boxed{\overset{r}{<}} c \text{ entraînent } a \boxed{\overset{r}{<}} c;$$

2° Si *a* est de rang inférieur à *b* et que *b* soit de rang inférieur à *c*, il en résulte que *a* est de rang inférieur à *c*, ce qui s'exprime encore :

$$a \boxed{\overset{r}{<}} b \text{ et } b \boxed{\overset{r}{<}} c \text{ entraînent } a \boxed{\overset{r}{<}} c.$$

Rangs des termes d'une même suite. — Deux termes distincts d'une même suite S seront toujours des termes de rang différent, car les termes de S non postérieurs à *a* et les termes de S non postérieurs à *a'*, ne constituent jamais des systèmes correspondants.

Toutefois, un terme *a* et un terme *a'* d'une même suite S sont de même rang lorsque *a* et *a'* désignent le même terme de S ; car la définition des termes de même rang implique que tout terme d'une suite S doit être considéré comme de même rang que lui-même.

Il résulte directement de ces notions, que tous les termes d'une suite antérieurs à l'un d'eux *a* seront de rang inférieur à *a*, et que tous les termes postérieurs à *a*, seront de rang supérieur à *a*.

Un terme *a* d'une suite S partage donc tous les autres termes

de cette suite en termes de rang inférieur à a et en termes de rang supérieur à a.

Nous avons montré au début du paragraphe III, comment l'homme peut former des couples d'éléments de deux systèmes S et S′, qui constituent un système de correspondance d'éléments de S et de S′, et comment il peut continuer à former de tels couples d'éléments de S et de S′, jusqu'à ce qu'ils constituent un système complet de correspondance entre tous les éléments de l'un des deux systèmes S et S′ et la totalité ou une partie des éléments de l'autre.

Ce mode d'établissement d'un système complet de correspondance entre tous les éléments de l'un des systèmes S et S′, et la totalité ou une partie des éléments de l'autre, nous permet de discerner si les systèmes S et S′ sont ou ne sont pas correspondants ; et s'ils ne sont pas correspondants, il nous permet de discerner lequel des deux est inférieur à l'autre.

Nous avons démontré que si un système S n'est pas supérieur à un système S′, on ne parviendra jamais à établir un système complet de correspondance entre tous les éléments de S′ et une partie des éléments de S, et l'on parviendra toujours, par le procédé décrit, à constituer un système complet de correspondance entre tous les éléments de S et la totalité ou une partie des éléments de S′.

Théorème XX. — Si un système fini S n'est pas supérieur au système constitué par les éléments d'une suite S′, on peut toujours trouver dans S′ un terme a' et un seul, tel que les termes S′ non postérieurs à a' constituent un système correspondant à S.

En effet, on peut toujours constituer un couple d'éléments du système S et de la suite S′, en choisissant pour les accoupler l'un à l'autre un élément de S et le terme initial de S′ ; et lorsqu'on aura constitué ce couple, on pourra en constituer un autre formé par un élément de S qui ne fasse pas partie

du couple précédent, et par le terme de S′ qui suit immédiatement le terme initial.

On pourra continuer à constituer l'un après l'autre des couples d'éléments de S et S′ formés chacun par un élément de S choisi parmi ceux qui ne font pas partie des couples précédents, et par le terme de S′ qui suit immédiatement celui du couple précédent.

On pourra, dans ces conditions, faire succéder un couple à un autre, jusqu'à ce que tous les éléments du système S ou tous les éléments de la suite S′ aient été choisis pour former des couples. On ne parviendra jamais, en continuant à former ainsi successivement des couples d'éléments de S et de S′, à introduire dans ces couples tous les éléments de la suite S′ et une partie seulement des éléments de S, car ces couples constitueraient alors un système complet de correspondance entre tous les éléments de S′ et une partie des éléments de S, ce qui est contraire à l'hypothèse d'un système S non supérieur à S′ ; mais si le système S est fini, on parviendra, par ce procédé de constitution de couples, à introduire successivement dans leur composition tous les éléments de S et les termes de S′ non postérieurs à un élément *a′* de cette suite.

Ces couples constitueront un système complet de correspondance entre les éléments de S et les termes de la suite S′, non postérieurs à *a′*.

Le système S et le système constitué par les termes non postérieurs à un terme *a′* de la suite S′ sont donc correspondants.

a′ est le seul terme de S′ qui constitue avec les termes précédents, un système correspondant à S; car tout autre terme *b′* de S′ occupe dans cette suite un rang différent de celui occupé par *a′*. Le système constitué par les termes de S′ non postérieurs à *b′* n'est donc pas correspondant au système constitué par les termes de S′ non postérieurs à *a′*, et par suite il n'est pas correspondant au système S.

Théorème XXI. — Si un système S est limité et si une suite S′ est illimitée, on peut toujours trouver dans la suite S′ un terme *a′* et un seul, tel que les termes de S′ non postérieurs à *a′* constituent un système correspondant à S.

En effet, le système S est fini, tandis que le système constitué par les termes de S′ n'est pas fini. Or, nous avons fait observer, immédiatement après la définition de l'infériorité d'un système sur un autre, qu'un système fini est inférieur à tout système non fini. Le système S est donc inférieur au système constitué par les termes de la suite illimitée S′ et il est toujours possible, d'après le théorème précédent, de trouver dans la suite S′ un terme *a′* et un seul, tel que les termes de S′ non postérieurs à *a′* constituent un système correspondant à S, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème XXII. — Si un terme *a* d'une suite S n'est pas de rang supérieur à tout terme d'une suite S′, on peut toujours trouver dans la suite S′ un terme *a′* et un seul qui soit de même rang que *a*.

En effet, si un terme *a* d'une suite S n'est pas de rang supérieur à tout terme d'une suite S′, le système A, constitué par les termes de S non postérieurs à *a*, n'est pas supérieur à tout système constitué par les termes de S′ non postérieurs à un terme quelconque de S′.

Le système A n'est donc pas supérieur à un système B′ constitué par les termes de S′ non postérieurs à l'un d'eux *b′*; et le système B′, constitué par tout ou partie des termes de S′, n'est pas supérieur au système constitué par tous les termes de la suite S′.

Or, si un système A n'est pas supérieur à un système B′ et que B′ ne soit pas supérieur au système constitué par les termes de S′, il résulte des propositions précédentes que A n'est pas supérieur au système constitué par les termes de S. On peut donc, en vertu du théorème XX, trouver dans S′ un terme *a′* et un seul tel que les termes de S′ non postérieurs à

a' constituent un système correspondant à A. Ce terme *a'* de S' est donc de même rang que le terme *a* de la suite S, et c'est le seul terme de S' qui jouisse de cette propriété. On peut donc toujours trouver dans S' un terme *a'* et un seul de même rang que le terme *a* de S, pourvu que *a* ne soit pas de rang supérieur à tout terme de S'.

Théorème XXIII. — Si l'on choisit un terme *a* d'une suite S, et une suite illimitée S', on peut toujours trouver dans S' un terme *a'* et un seul qui soit de même rang que *a*.

En effet, les termes de la suite S non postérieurs à l'un d'eux *a* constituent un système fini A. On pourra donc, d'après le théorème XXI, trouver dans la suite illimitée S' un terme *a'* et un seul tel que les termes de S' non postérieurs à *a'* constituent un système correspondant à A.

Le terme *a'* sera donc par définition de même rang que le terme *a* de S, et tout terme de S' autre que *a'*, ne constituant pas avec les termes qui précèdent *a'* un système correspondant à A, ne sera pas de même rang que le terme *a* de S.

Théorème XXIV. — Si aucun terme d'une suite S n'est de même rang qu'un terme *a'* d'une suite S', le terme *a'* de S' est de rang supérieur à tout terme de S'.

En effet, *a'* ne peut être de rang inférieur à un terme de S, car a' ne serait pas de rang supérieur à tout terme de S ; et on pourrait, en vertu du théorème XXII, trouver dans S un terme *a* de même rang que *a'*, ce qui est contraire à l'hypothèse.

a' qui n'est de même rang qu'aucun des termes de S, et qui n'est de rang inférieur à aucun des termes de S, est donc de rang supérieur à tout terme de S.

On peut encore énoncer ce théorème sous la forme suivante :

Théorème XXV. — Si aucun des termes d'une suite S n'est de même rang qu'un terme *a'* d'une suite S', tous les termes de S seront de rang inférieur au terme *a'* de S'.

THÉORÈME XXVI. — Si l'on choisit deux suites, l'une d'elles est telle que tout terme de cette suite soit de même rang qu'un des termes de l'autre suite.

En effet, si nous choisissons deux suites S et S′, et qu'un terme a' de S′ ne soit pas de même rang qu'un des termes de S, a' est de rang supérieur à tout terme de S, en vertu du théorème précédent.

Tout terme b de S est donc de rang inférieur au terme a' de S′, et par suite, b n'est pas de rang supérieur à tout terme de S′. Donc, en vertu d'un des théorèmes précédents, on peut toujours trouver dans S′ un terme b' de même rang que b.

Donc, si tout terme de S′ n'est pas de même rang qu'un des termes de S, tout terme de S est de même rang qu'un des termes de S′, et tout terme de l'une des deux suites S et S′ jouit de la propriété d'être de même rang qu'un des termes de l'autre.

THÉORÈME XXVII. — Si un terme a d'une suite S et un terme a' d'une suite S′ sont de même rang et si aucun de ces deux termes n'est le dernier de sa suite, le terme b qui suit immédiatement a dans la suite S et le terme b' qui suit immédiatement a' dans la suite S′ sont aussi des termes de même rang.

En effet, il résulte immédiatement de l'hypothèse que les systèmes A et A′, formés, l'un par les termes de S non postérieurs à a, l'autre par les termes de S′ non postérieurs à a' sont des systèmes correspondants, c'est-à-dire qu'on a les correspondances :

$$A\,[=]\,A' \qquad b\,[=]\,b',$$

d'où il résulte la correspondance :

$$A + b\,[=]\,A' + b',$$

c'est-à-dire que le système constitué par les termes de S non postérieurs à b, et le système constitué par les termes de S′ non postérieurs à b' sont correspondants, ce qui s'exprime en disant que les termes b et b' sont de même rang.

Correspondance de deux suites. Infériorité, supériorité d'une suite sur une autre. — On exprime que le système A, constitué par les termes d'une suite S, et le système A′, constitué par les termes d'une suite S′, sont correspondants, en disant que les deux suites S et S′ sont correspondantes.

On exprime que le système A est inférieur au système A′, ou que le système A est supérieur au système A′, en disant que la suite S est inférieure ou qu'elle est supérieure à la suite S′.

Il résulte immédiatement de ces définitions, que si l'on choisit une suite S, toute suite S′ est correspondante, inférieure ou supérieure à la suite S, et qu'elle ne jouit que d'une seule de ces propriétés.

La correspondance de suites sera donc, comme la correspondance de systèmes : réflexe, symétrique et transitive ; et il existe entre les suites les mêmes relations de correspondance et d'infériorité qu'entre les systèmes.

On pourra toujours établir un système de correspondance entre les termes de deux suites S et S′ par le procédé de constitution que nous avons exposé au début du paragraphe III. On pourra appliquer cette méthode en choisissant d'abord le terme initial de S et le terme initial de S′, pour former un couple constitué par deux termes de même rang, et en continuant à choisir pour former chacun des couples du système de correspondance, le terme de S et le terme de S′ qui suivent immédiatement le terme de S et le terme de S′ du couple précédemment formé.

On parviendra ainsi, si l'une au moins des suites S et S′ est finie, à former, comme nous l'avons établi au théorème XII, un système complet T de correspondance entre tous les termes d'une de ces suites, et la totalité ou une partie des éléments de l'autre.

Ce système de correspondance T sera, en vertu du théorème XXVII, constitué par des couples formés chacun de deux termes de même rang, l'un de la suite S, l'autre de la suite S′.

Si on peut établir un tel système complet de correspondance entre les termes de S et de S′, tout terme de l'un quelconque des systèmes S et S′ est de même rang qu'un terme de l'autre.

Si on peut établir un tel système complet de correspondance entre tous les termes de l'un de ces systèmes S ou S′ et une partie des termes de l'autre, tout terme d'un des systèmes S et S′ est de même rang qu'un terme de l'autre ; mais tout terme de l'autre ne jouit pas de cette propriété.

Dans un cas, les suites S et S′ sont correspondantes. Dans l'autre cas, l'une d'elles est inférieure à l'autre, et par conséquent les deux suites S et S′ ne sont pas correspondantes.

Il en résulte directement, que la condition nécessaire et suffisante pour que deux suites S et S′ soient correspondantes, est que tout terme de l'une quelconque de ces suites soit de même rang qu'un terme de l'autre.

On voit de même que, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite S soit inférieure à une suite S′, est que tout terme de S soit de même rang qu'un terme de S′, et que tout terme de S′ ne soit pas de même rang qu'un terme de S.

Si une suite S est supérieure à une suite S′, tout terme *b* de S qui n'est pas de même rang qu'un des termes de S′ est de rang supérieur à tous les termes de S′, conformément au théorème XXIV, et par suite, à tout terme de S qui est de même rang qu'un des termes de S′.

Les termes de S qui ne sont pas de même rang que des termes de S′, seront donc postérieurs aux termes de S qui sont de même rang que des termes de S′.

La suite des termes de S, depuis le terme initial jusqu'à un terme *a*, constitue une suite partielle.

Tous les termes de la suite S qui sont de même rang qu'un des termes de la suite S′ précèdent donc tout terme de la suite S qui n'est pas de même rang qu'un terme de S′.

Les termes de S qui sont de même rang que des termes de

S′ se suivent donc l'un immédiatement après l'autre, depuis le terme qui est de même rang que le terme initial de S′, jusqu'à ce que tous les termes de S de même rang que des termes de S′ se soient succédé, c'est-à-dire jusqu'au terme qui est de même rang que le dernier terme de S′.

Suites de paroles. Théorème XXVIII. — L'homme peut toujours prononcer une suite de paroles telle que tout terme *a* d'une suite donnée S soit de même rang qu'une des paroles de cette suite.

En effet, nous pouvons toujours prononcer une suite de paroles P ; et lorsque nous avons prononcé une suite de paroles P, nous pouvons toujours prononcer immédiatement après la dernière parole de cette suite une autre parole, qui forme avec la suite P une nouvelle suite P′. Nous pouvons former ainsi des suites P′, P″,..., P‴ telles que chacune de ces suites soit formée par la précédente suivie d'une nouvelle parole.

Si donc le système formé par les termes d'une suite de paroles P est inférieur au système formé par les termes d'une suite donnée S de phénomènes, on peut établir un système complet de correspondance entre une partie des éléments de S et tous les éléments de P. Les termes de la suite P′ formée en prononçant une nouvelle parole immédiatement après la dernière parole de P, constituent un nouveau système dont les éléments correspondent à tous les éléments de S qui correspondaient aux éléments de P et à un élément de S qui ne correspondait pas aux éléments de P. En continuant à former ainsi de nouvelles suites de paroles, on parviendra toujours à former une suite de paroles P‴ dont les termes correspondront respectivement à chacun des termes de S.

Les termes de la suite P‴ formeront donc un système correspondant aux termes de la suite S, et, par conséquent, tout terme de la suite donnée S sera de même rang qu'un des termes de la suite de paroles P‴.

Théorème XXIX. — L'homme peut toujours prononcer une suite de paroles telle qu'un système donné S ne soit pas supérieur au système constitué par les paroles de cette suite.

En effet, nous pouvons toujours prononcer une suite P de paroles ; et lorsque nous avons prononcé une suite P de paroles, nous pouvons toujours prononcer immédiatement après la dernière parole de P une autre parole p' qui forme avec les paroles de P une nouvelle suite P'.

Nous pouvons ainsi former des suites P', P'',..., P''' constituées chacune par la précédente suivie d'une nouvelle parole.

Si un système donné S est supérieur au système Q constitué par les paroles d'une suite P, on peut établir un système complet de correspondance entre une partie S_I des éléments de S et tous les éléments de P.

Les termes de la suite P' formée en prononçant une nouvelle parole p' immédiatement après la dernière parole de P constituent un nouveau système Q' équivalent à $Q + p'$ qu'on peut faire correspondre à $S_I + s$, c'est-à-dire à un système formé par les éléments de S qui correspondaient aux termes de P et par un autre élément s de S qui ne correspondait pas à un terme de P.

En continuant à former ainsi de nouvelles suites de paroles, chacune de ces opérations formera une suite de paroles qui correspondra aux mêmes éléments de S que la suite précédente et en outre à un autre élément de S. On parviendra donc toujours, si S est fini, à prononcer une suite de paroles dont les termes pourront correspondre à tous les termes de S, c'est-à-dire qu'on pourra toujours prononcer une suite de paroles telle qu'un système donné S ne soit pas supérieur au système constitué par les paroles de cette suite.

Théorème XXX. — L'homme peut toujours prononcer une suite de paroles telle que le système constitué par les paroles non postérieures à l'une d'elles soit correspondant à un système donné.

Car on peut toujours prononcer une suite de paroles telle qu'un système donné S ne soit pas supérieur au système constitué par les paroles de cette suite, et en vertu du théorème XX on peut trouver dans cette suite une parole *a* et une seule telle que les paroles non postérieures à *a* constituent un système correspondant à S.

V

L'IDENTITÉ RESPECTIVE DES ÉLÉMENTS DE DEUX SYSTÈMES

La notion de correspondance entre les éléments de deux systèmes nous permet de donner une définition plus simple de l'identité respective des éléments de deux systèmes.

Définition. — Si entre les éléments d'un système S et d'un système S′, on peut établir un système complet de correspondance qui associe tout élément de l'un quelconque de ces systèmes à un élément identique de l'autre système, on exprime ce fait en disant que les systèmes S et S′ sont constitués par des éléments *respectivement identiques*.

On exprime encore ce fait en disant que les éléments de l'un quelconque des systèmes S et S′ sont *respectivement les mêmes* que ceux de l'autre système.

Caractères de l'identité respective des éléments de deux systèmes. — La notion d'identité respective des éléments de deux systèmes est liée à la notion de correspondance des systèmes dont elle définit un cas particulier.

La notion de deux systèmes tels que tout élément de l'un quelconque de ces systèmes soit identique à un élément de l'autre, ne peut remplacer la notion de systèmes constitués par des éléments respectivement identiques.

Dans le cas où les éléments de S identiques à l'un d'eux *a* constituent un système partiel A non correspondant au système A′ constitué par les éléments de S′ identiques à *a*, les

éléments de S et de S′ ne seront jamais respectivement identiques; et cependant, tout élément de l'un quelconque des systèmes S et S′ pourrait être identique à un élément de l'autre.

Condition d'identité respective des éléments de deux systèmes. — Il résulte immédiatement de la définition précédente que la condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes S et S′ soient constitués par des éléments respectivement identiques, est que tout élément de l'un quelconque de ces deux systèmes soit identique à un élément de l'autre, et que les éléments de S et de S′ identiques à un élément quelconque de l'un ou de l'autre de ces deux systèmes, constituent deux systèmes correspondants.

Cette dernière condition qui comprend la première, en considérant tout élément différent des autres éléments du même système comme un système formé par ce seul élément, est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les éléments de deux systèmes S et S′ soient respectivement identiques.

Comme deux systèmes finis S et S′ sont soumis à l'alternative de satisfaire ou de ne pas satisfaire à cette condition, et comme nous sommes toujours en état de reconnaître si deux systèmes définis remplissent ou ne remplissent pas cette condition, il en résulte que deux systèmes sont soumis à l'alternative d'être ou de ne pas être constitués par des éléments respectivement identiques, et que nous saurons toujours si deux systèmes définis sont ou ne sont pas constitués par des éléments respectivement identiques.

Si tout élément de l'un quelconque des deux systèmes S et S′ est différent des autres éléments du même système, il suffit que tout élément de l'un quelconque de ces deux systèmes soit identique à un élément de l'autre pour que les éléments de S et de S′ soient respectivement identiques.

Réflexité, symétricité, transitivité de l'identité respec-

TIVE DES ÉLÉMENTS DE DEUX SYSTÈMES. Une identité respective des éléments de deux systèmes s'écrira comme une identité de phénomènes, de paroles ou d'objets en séparant par le signe $\equiv$ les lettres qui désignent chacun de ces deux systèmes.

Il résulte des définitions précédentes que l'identité respective des éléments de deux systèmes est réflexe, symétrique et transitive; ce qui complète l'assimilation de cette notion particulière d'identité, à l'identité des phénomènes, des paroles et des objets.

VI

L'IDENTITÉ DES SUITES

SUCCESSIONS DE PHÉNOMÈNES CONSTITUÉS PAR DES ÉLÉMENTS RESPECTIVEMENT IDENTIQUES. — Avant d'établir la notion de sommes, et celle de la correspondance des éléments de deux systèmes, nous avons donné une première définition des suites de phénomènes constitués respectivement par les mêmes phénomènes rangés dans le même ordre ou dans des ordres différents.

Les notions de correspondance, et celles de rang d'une suite de phénomènes que nous avons établies depuis, nous permettent de donner de ces propriétés de la suite, une définition plus simple mais équivalente à la première définition.

DÉFINITION. — On dit que deux suites S et S′ sont constituées par des éléments respectivement identiques qui se succèdent *dans le même ordre*, lorsqu'on peut établir entre les termes de ces deux suites un système complet de correspondance tel que tout élément a de l'un quelconque de deux systèmes S et S′ soit identique à l'élément correspondant a' de l'autre système, et que deux éléments quelconques a et b de l'un des systèmes S et S′ se succèdent dans le même ordre que les deux éléments correspondants a' et b' de l'autre système.

Lorsqu'un tel système de correspondance ne peut être éta-

bli entre les éléments de deux suites S et S′ constituées par des éléments respectivement identiques, on dit que les suites S et S′ sont formées par des éléments respectivement identiques qui se succèdent *dans un ordre différent.*

On exprime encore les mêmes idées, en disant que deux suites sont formées respectivement par les mêmes phénomènes rangés dans le même ordre ou dans un ordre différent.

Si deux suites S et S′ sont formées par des phénomènes tels que tout élément d'une quelconque de ces deux suites soit différent des autres éléments de la même suite, il résulte des notions d'identité respective établies au paragraphe précédent, qu'on exprime encore plus simplement les mêmes idées en disant que les suites S et S′ sont formées par les mêmes phénomènes rangés dans le même ordre ou dans un ordre différent suivant que S et S′ seront formés respectivement par les mêmes phénomènes rangés dans le même ordre ou dans un ordre différent.

Suites identiques. — On dit que deux suites sont identiques pour exprimer qu'elles sont constituées respectivement par les mêmes éléments rangés dans le même ordre.

Identité de rang des éléments correspondants de deux suites identiques. — Si deux suites de phénomènes S et S′ sont identiques, on peut établir entre les éléments de ces deux suites un système complet de correspondance T tel que tout élément x de S et un élément quelconque a de S lié à x par la relation d'antériorité :

$$a \ll x.$$

soient associés respectivement à deux éléments a' et x' de S′ liés à a et x par les relations d'identité :

$$a \equiv a' \qquad x \equiv x'$$

et liés entre eux par la relation d'antériorité :

$$a' \ll x'.$$

Il résulte encore de la définition des suites identiques que tout élément x' de S′ et un élément quelconque b′ de S′ lié à x' par la relation d'antériorité :

$$b' \ll x'$$

sont associés respectivement par le système T à deux éléments b et x de S, liés à b' et x' par les relations d'identité :

$$b' \equiv b \qquad x' \equiv x$$

et liés entre eux par la relation d'antériorité :

$$b \ll x.$$

Tout élément de S fait, par définition, partie d'un couple de T et de ce seul couple.

Si l'on choisit tous les couples de T formés par les éléments de S antérieurs à a associés à des éléments de S′, on forme ainsi un système partiel U de couples du système T, tel que tout élément de S antérieur à a fasse partie d'un couple de U et ne fasse partie que d'un seul couple de U.

Le système T fait, par définition, correspondre l'élément a de S à un élément a' de S′; or, nous venons d'établir que tout élément b' de S′ antérieur à a', correspond à un élément b de S antérieur à a.

Cet élément b de S antérieur à a, fait partie d'un couple de U, où il est associé avec l'élément b' de S′.

L'élément b' de S′ ne fait partie d'aucun autre couple de U, puisqu'il ne fait partie que d'un seul couple de T, et que U est un système partiel de T.

Le système U est donc un système complet de correspondance entre les éléments de S antérieurs à a et les éléments de S′ antérieurs à a'.

Les termes de la suite S qui précèdent un terme quelconque a, et les termes de la suite S′ qui précèdent le terme a' correspondant à a, constituent deux ensembles correspondants.

Les termes de S non postérieurs au terme a de cette suite,



et les termes de S′ non postérieurs au terme a' de S' sont donc aussi des ensembles correspondants, ce qui s'exprime dans le langage convenu précédemment adopté, en disant que a et a' sont des termes de même rang des deux suites S et S′.

On formule cette propriété des termes correspondants de deux suites identiques, par la proposition suivante :

Théorème XXXI. — Si deux suites de phénomènes sont identiques, tout terme de l'une quelconque de ces suites et le terme correspondant de l'autre suite sont des termes de même rang.

La réciproque de ce théorème est vraie. Elle peut s'énoncer ainsi :

Théorème XXXII. — Si tout terme de l'une quelconque des deux suites S et S′ est identique au terme de même rang de l'autre suite, les deux suites S et S′ sont identiques.

En effet, si l'on associe successivement une fois et une seule chacun des éléments d'une de ces suites à l'élément du même rang de l'autre suite, on forme entre les éléments de ces deux suites, un système complet de correspondance T; ce système sera tel que tout élément de l'une quelconque de ces deux suites corresponde à un élément identique de l'autre suite, et que deux éléments a et b de l'une quelconque des suites S et S′, soient toujours rangés dans le même ordre que les éléments correspondants a' et b' de l'autre suite, puisque deux éléments de même rang sont identiques par hypothèse, et que deux éléments quelconques a et b de ces deux suites se succèdent toujours dans le même ordre que les deux éléments de même rang a' et b' de l'autre suite.

DEUXIÈME PARTIE

LE NOMBRE ET LES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES DE L'ARITHMÉTIQUE

INTRODUCTION

Dans la première partie de ce travail, j'ai mis en lumière dix-huit notions tirées uniquement de l'observation psychologique.

Ces seuls principes m'ont servi de base pour établir les relations qui existent entre les phénomènes psychiques généraux d'une part et entre les paroles d'autre part, et je n'ai fait appel aux concepts introduits dans la représentation du monde extérieur, ainsi qu'aux lois expérimentales qui régissent ces concepts, que pour étendre aux phénomènes physiques les relations déjà établies pour les phénomènes psychiques et pour les paroles.

Ces dix-huit principes peuvent servir de base à l'établissement de la science des nombres; c'est-à-dire, qu'on peut en déduire, par le seul raisonnement, toute la science des nombres, sans faire appel à l'observation du monde extérieur.

Dans la deuxième partie de ce travail, je déduirai des principes fondamentaux et des théorèmes déjà établis la théorie du nombre et des opérations élémentaires auxquelles on peut se livrer sur les nombres. Je montrerai ainsi l'usage que l'on peut faire de la notion de nombre et des opérations élémentaires sur les nombres, en appliquant ces notions et opérations aux systèmes définis de phénomènes, d'êtres ou d'objets, que

les hommes ont l'habitude de situer en dehors d'eux-mêmes. Dans ces applications de la théorie du nombre à des faits physiques, j'introduirai nécessairement certains concepts de la théorie du monde extérieur.

CHAPITRE PREMIER

LE NOMBRE

I

LA NOTION DE NOMBRE

La faculté que possède l'homme de pouvoir transmettre de proche en proche à ses semblables de même langue une suite de mots toujours identique à elle-même, a été basée sur le principe XVIII tiré de l'observation psychologique et a été exprimée sous la forme du théorème VII *bis*, lorsque nous avons exposé la théorie des suites de paroles dans la première partie de ce travail.

Les peuples civilisés ont toujours usé de cette faculté, pour établir dans leur langue une suite traditionnelle de mots, tous différents les uns des autres, et servant à former un système complet de correspondance entre les éléments de tout système défini de phénomènes ou d'êtres, et les termes de cette suite, depuis le premier jusqu'à l'un d'eux, sans omettre aucun des termes intermédiaires, pourvu toutefois que le système défini ne soit pas supérieur au système constitué par tous les termes de la suite traditionnelle.

Toute suite de mots peut servir à un tel usage.

Cela résulte immédiatement du théorème XX, établi dans la première partie, et qui s'exprime ainsi : si un système fini S n'est pas supérieur au système constitué par les éléments d'une suite S′, on peut toujours trouver dans S′ un terme a' et un seul, tel que les termes de S′ non postérieurs à a', constituent un système correspondant à S.

Chaque peuple a donc pu établir arbitrairement, pour cet

usage spécial, une suite de mots tous différents les uns des autres, et associer à chacun d'eux un signe graphique différent. Cette suite de mots est dite *une suite de nombres.*

La suite de nombres adoptée par les peuples qui parlent ou qui parlaient telle ou telle langue, est dite la suite des nombres de cette langue; et l'on dit : *la suite des nombres* pour désigner la suite de nombres en usage dans notre langue.

Tout mot identique à un terme de la suite des nombres d'une langue est dit : « *un nombre de cette langue* ».

Cette définition du nombre comprend tous les termes de cette suite de nombres, car chacun de ces termes est identique à lui-même.

Nous disons : « *un nombre* », sans autre désignation complémentaire, pour exprimer que nous parlons d'un des nombres de notre langue.

On appelle *suite partielle* de nombres, toute suite de mots qui commence à un terme de la suite des nombres d'une langue, et qui se poursuit jusqu'à un autre terme de cette même suite, sans omission ni répétition d'aucun terme intermédiaire. Une suite partielle de nombres sera donc définie, quand on connaîtra son premier et son dernier terme.

Le nombre *un* étant le terme initial de la suite des nombres de notre langue, toute suite partielle de nombres commençant par le terme initial de la suite française, et finissant par un autre nombre n de cette même suite, est dite la suite des nombres de *un* à n.

II

L'ÉGALITÉ DES NOMBRES

Définition. — Deux nombres formés par deux mots identiques l'un et l'autre à un même terme de la suite des nombres sont dits : *des nombres égaux.*

Deux nombres qui ne sont pas égaux sont dits : *des nombres inégaux.*

Il résulte immédiatement de ces définitions que, deux nombres inégaux ne sont jamais formés par des mots identiques l'un et l'autre à un même terme de la suite des nombres.

Propriété fondamentale des nombres inégaux. — Deux nombres inégaux sont toujours formés, l'un par un mot identique à un terme de la suite des nombres, l'autre par un mot identique à un autre terme de la même suite.

En effet, si deux mots *a* et *b* constituent des nombres, chacun d'eux est, par définition, identique à un terme de la suite traditionnelle.

Si les mots *a* et *b* constituent des nombres inégaux, il résulte immédiatement de la définition des nombres inégaux, que *a* et *b* ne sont jamais identiques l'un et l'autre à un même terme de la suite traditionnelle.

Les mots *a* et *b* étant respectivement identiques à des termes de la suite des nombres, et n'étant pas identiques l'un et l'autre à un même terme de cette suite, il en résulte que *a* et *b* sont identiques, l'un à un terme *m*, l'autre à un autre terme *n* de la suite traditionnelle ; ce qu'il fallait démontrer.

Réciproque. — Deux nombres formés, l'un par un mot identique à un terme de la suite traditionnelle, l'autre par un mot identique à un autre terme de la même suite, sont toujours des nombres inégaux.

En effet, si deux nombres sont formés par des mots *a* et *b* identiques, l'un à un terme *m*, l'autre à un autre terme *n* de la suite des nombres, ces deux termes *m* et *n* sont, par définition, des mots différents. On a donc les identités et non-identités de mots :

$$a \equiv m \qquad b \equiv n \qquad m \not\equiv n. \qquad (1)$$

Il en résulte toujours :

$$a \not\equiv b \qquad (2)$$

d'après la transitivité des identités de mots.

Si nous désignons par p un terme de la suite des nombres identique à a, et par q un terme de cette même suite identique à b, on a les identités :

$$a \equiv p \qquad b \equiv q$$

qui avec :

$$a \not\equiv b$$

entraînent toujours :

$$p \not\equiv q,$$

c'est-à-dire que deux mots différents a et b ne sont jamais identiques à un même terme de la suite des nombres.

Les nombres désignés par les mots a et b ne seront donc jamais des nombres égaux, c'est-à-dire qu'ils seront toujours des nombres inégaux; ce qu'il fallait démontrer.

Relations alternatives entre deux nombres. — Il résulte de la définition de l'égalité et de l'inégalité des nombres, que deux nombres sont toujours soumis à l'alternative d'être égaux ou inégaux.

Il résulte des propriétés précédentes, que deux nombres sont toujours soumis à l'alternative d'être constitués par des mots identiques l'un et l'autre à un même terme de la suite des nombres, ou d'être constitués par des mots identiques, l'un à un terme, l'autre à un autre terme de la suite des nombres.

Dans un cas, les deux nombres sont toujours égaux, dans l'autre cas, ils sont toujours inégaux.

Théorème I. — Si deux nombres sont constitués par des mots identiques, ces deux nombres sont égaux; et s'ils sont constitués par des mots différents, les deux nombres sont inégaux.

En effet, si deux mots a et b constituent des nombres, ces mots sont, par définition, identiques, l'un à un terme m, l'autre à un terme n de la suite des nombres.

On a donc :

$$a \equiv m \qquad b \equiv n. \qquad (1)$$

Si les deux mots a et b sont identiques, les identités (1) et l'identité (2)

$$a \equiv b \qquad (2)$$

entraînent :

$$m \equiv n.$$

Cela signifie que si deux mots a et b qui constituent des nombres sont identiques, ils sont identiques l'un et l'autre à un même terme de la suite des nombres ; c'est-à-dire que les nombres formés par ces deux mots identiques sont égaux.

On a de même avec les identités :

$$a \equiv m \qquad b \equiv n, \qquad (1)$$

l'expression :

$$a \not\equiv b \qquad (2)$$

lorsque les deux nombres sont constitués par des mots différents a et b, et il en résulte toujours :

$$m \not\equiv n$$

pour deux termes identiques, l'un à a, l'autre à b ; ce qui exprime que, dans ce cas, a et b ne sont jamais identiques l'un et l'autre à un même terme, c'est-à-dire que les deux nombres constitués par a et b ne sont pas égaux.

Ainsi se trouvent démontrées les deux parties du théorème I.

Remarque. — Deux nombres sont toujours constitués par deux mots identiques ou différents. Dans un cas, ce sont des nombres égaux, et, dans l'autre, des nombres inégaux, selon la définition adoptée précédemment. On peut donc se servir de la relation alternative que nous venons d'établir, et qui unit toujours deux nombres pour définir ainsi l'égalité ou l'inégalité de deux nombres :

Deux nombres qui sont constitués par des mots identiques sont dits des nombres égaux.

Deux nombres qui sont constitués par des mots différents sont dits des nombres inégaux.

Autre expression de l'égalité de deux nombres. — On exprime encore qu'un nombre A est égal à un nombre B, en disant que A désigne le *même nombre* que B, en étendant aux nombres égaux la même dénomination qu'aux paroles identiques.

Egalité de deux nombres. — Une expression algébrique formée de deux mots qui désignent des nombres séparés l'un de l'autre par le mot *égal* s'appelle une *égalité de nombres*. Elle s'écrit à l'aide de deux caractères désignant chacun un nombre, séparés l'un de l'autre par le signe =.

L'expression « A *égal à* B », dans laquelle A et B désignent chacun un nombre, et qui s'écrit :

$$A = B$$

est une égalité de nombres.

L'égalité de nombres est réflexe, symétrique et transitive comme l'identité de paroles, dont elle n'est qu'un cas particulier.

L'expression « A *inégal à* B », dans laquelle A et B désignent deux nombres, et qui s'écrit :

$$A \neq B$$

exprime que le nombre A n'est pas égal au nombre B, et s'appelle une inégalité de nombres.

Lemme. — Tout mot identique à un terme de la suite des nombres, est différent de tout autre terme de cette suite.

En effet, si nous désignons par a un mot identique à un terme m de la suite des nombres, et si nous désignons par n tout autre terme de cette suite, les termes m et n seront, par définition, deux mots différents.

Or, il résulte des propriétés de l'identité de faits de conscience, étendues à l'identité de mots, que les deux mots différents m et n ne peuvent jamais être l'un et l'autre identiques à un même mot a.

Le mot *m* étant par hypothèse identique à *a*, le mot *n* sera donc différent de *a*.

Il est ainsi établi que si un mot *a* est identique à un terme *m* de la suite des nombres, tout autre terme *n* de cette suite est différent de *a*.

Tout mot *a* identique à un terme *m* de la suite des nombres est donc différent de tout autre terme *n* de cette suite; ce qu'il fallait démontrer.

Relation entre deux nombres inégaux. — Si deux nombres A et B sont tels que le nombre égal à A de la suite traditionnelle précède le nombre égal à B de cette même suite, on exprime ce fait en disant que le nombre A est *plus petit que* le nombre B, ou que B est *plus grand que* A.

Théorème II. — Quand deux nombres sont inégaux, l'un d'eux doit être toujours plus petit que l'autre.

En effet, nous avons établi immédiatement après la définition de deux nombres inégaux, que si deux nombres sont inégaux, l'un deux est constitué par un nombre *a* identique à un terme *m*, et l'autre par un nombre *b* identique à un autre terme *n* de la suite traditionnelle.

L'un des deux termes distincts *m* et *n* de la suite des nombres précède toujours l'autre.

Celui des deux mots *a* et *b* qui est identique à celui des deux termes *m* et *n* qui précède l'autre, constitue par définition un nombre plus petit que le nombre constitué par l'autre mot.

Théorème III. — Quand deux nombres sont égaux, aucun d'eux n'est plus petit ou plus grand que l'autre.

En effet, toutes les fois que deux nombres A et B sont tels que l'un d'eux soit plus petit que l'autre, l'un de ces nombres est par définition constitué par un mot *a* identique à un terme *m* de la suite des nombres, et l'autre est constitué par un mot *b* identique à un terme *n* de la même suite, qui succède au terme *m*.

Le terme *m* qui précède le terme *n* dans la suite des nombres est, par définition, un mot différent de *n*.

Or, nous avons déjà établi que deux nombres A et B formés, l'un par un mot identique à un terme, l'autre par un mot identique à un autre terme de la suite traditionnelle, sont toujours des nombres inégaux.

Si deux nombres sont égaux, l'un d'eux ne sera donc jamais plus petit que l'autre, et par conséquent aucun d'eux ne sera plus petit ou plus grand que l'autre ; ce qu'il fallait démontrer.

Distinction entre deux nombres inégaux. — Nous avons déjà fixé le sens adopté pour les expressions algébriques : « A *égal à* B » et « A *inégal à* B » quand A et B désignent des nombres. Nous avons aussi adopté pour écrire ces expressions les notations symboliques :

$$A = B \qquad A \neq B.$$

Pour compléter les expressions algébriques qui permettent d'énoncer symboliquement les relations qui existent toujours entre deux nombres, il convient de préciser le sens attribué aux expressions : « A *plus petit que* B » et « A *plus grand que* B », dans lesquelles les caractères A et B qui précèdent et qui suivent l'expression « *plus petit que* » ou « *plus grand que* » désignent des nombres.

Ces expressions, qui s'écrivent :

$$A < B \qquad A > B$$

expriment que le nombre A est plus petit que le nombre B, ou que le nombre A est plus grand que le nombre B.

Il résulte des définitions et des propositions que nous venons d'établir, le théorème suivant, qui en est la conséquence immédiate exprimée en langage algébrique.

Théorème IV. — Entre deux nombres quelconques A et B, il y a toujours une des relations :

$$A = B, \qquad A < B \text{ ou } A > B$$

et l'une quelconque de ces relations est incompatible avec chacune des deux autres.

Réflexité, symétricité, transitivité de l'égalité de nombres. — L'égalité de nombres est réflexe, symétrique et transitive, c'est-à-dire :

1° Tout nombre A est égal à lui-même ; c'est-à-dire que l'égalité réflexe :

$$A = A$$

a toujours lieu lorsque les caractères qui précèdent et qui suivent le signe = désignent un même nombre.

En effet, les caractères A désignant, par hypothèse, chacun le même nombre, désignent l'un et l'autre un même mot identique à un seul et même terme n de la suite des nombres.

Les caractères A désignant l'un et l'autre un mot identique à un même terme n de la suite des nombres, désignent, par définition, des nombres égaux, ce qui s'exprime et s'écrit :

$$A = A$$

L'égalité $A = A$ a donc lieu toutes les fois que les caractères réflexes désignent le même nombre ; ce qu'il fallait établir.

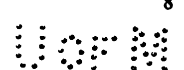
2° L'une quelconque des égalités symétriques de nombres :

$$A = B \qquad B = A$$

entraîne toujours l'autre ; car l'une et l'autre de ces égalités exprimant que A et B sont des nombres égaux, il s'ensuit que chacune d'elles entraîne l'autre.

3° Les égalités transitives de nombres :

$$A = B \qquad B = C$$



entraînent toujours l'égalité de nombres :

$$A = C.$$

Si A, B, C désignent des nombres, les égalités :

$$A = B \qquad B = C \tag{1}$$

expriment que les mots A, B, C sont liés par les identités de mots :

$$A \equiv B \qquad B \equiv C$$

qui, en vertu de la transitivité des identités de mots, entraînent l'identité :

$$A \equiv C$$

Les mots identiques A et C étant par hypothèse des nombres, sont, d'après le théorème I, des nombres égaux, ce qui s'exprime par l'égalité de nombres :

$$A = C \tag{2}$$

Les égalités (1) entraînent donc l'égalité (2) ; ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte immédiatement de ces trois propriétés caractéristiques de l'égalité de nombres les deux propositions complémentaires suivantes :

1° Les égalités de nombres

$$A = C \qquad B = C' \qquad C = C'$$

entraînent toujours l'égalité :

$$A = B.$$

La démonstration se déduit immédiatement de la transitivité des égalités de nombres.

En effet, on a par hypothèse :

$$A = C \qquad C = C' \qquad C' = B$$



De $A = C$ et de $C = C'$, il résulte :

$$A = C'.$$

De $A = C'$ et de $C' = B$, il résulte l'égalité :

$$A = B;$$

ce qu'il fallait démontrer.

2° Les relations de nombres :

$$A = C \qquad B = C' \qquad C \neq C'$$

entraînent toujours l'inégalité de nombres :

$$A \neq B.$$

En effet, il résulte immédiatement du théorème précédent que des égalités de nombres :

$$A = C \qquad B = C' \qquad A = B \qquad (1)$$

ne peuvent jamais avoir lieu toutes les trois avec l'inégalité

$$C \neq C' \qquad (2)$$

puisqu'elles entraînent toujours l'égalité $C = C'$.

Si donc des nombres A, B, C, C′ sont liés par deux des relations (1) et par la relation (2), c'est-à-dire si on a :

$$A = C \qquad B = C' \qquad C \neq C'$$

on ne peut jamais avoir l'égalité $A = B$, c'est-à-dire qu'on a toujours l'inégalité :

$$A \neq B;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte des trois propriétés caractéristiques de l'égalité des nombres, les corollaires suivants :

1° Les relations de nombres :

$$A = B \qquad B < C \qquad (1)$$

entraînent toujours la relation :

$$A < C \qquad (2)$$

Il résulte des relations (1) que A et B sont des mots identiques à un même terme *m* de la suite des nombres, et que les nombres B et C sont identiques, l'un B, au terme *m* de la suite des nombres, l'autre C, à un autre terme *n* de la même suite, postérieur à *m*.

Le nombre A, étant un mot identique au terme *m* de la suite des nombres, et le nombre C, étant un mot identique à un terme *n* postérieur à *m*, le nombre A est, par définition, plus petit que C, ce qui s'exprime et s'écrit :

$$A < C.$$

Les relations (1) entraînent donc toujours la relation (2) ; ce qu'il fallait établir.

2° Les relations de nombres :

$$A < B \qquad B = C$$

entraînent toujours la relation :

$$A < C.$$

La première de ces relations exprime que le nombre A est un mot identique à un terme *m* de la suite des nombres, et que B est identique à un terme *n* postérieur à *m*.

Mais B = C exprime que B et C sont des mots identiques au même terme *n* de la suite des nombres.

A étant un mot identique à un terme *m* de la suite des nombres, et C un mot identique à un terme *n* postérieur à *m*, est, par définition, un nombre plus petit que C.

On a donc :

$$A < C;$$

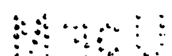
ce qu'il fallait démontrer.

3° Les relations de nombres :

$$A < B \qquad B < C \tag{1}$$

entraînent la relation :

$$A < C. \tag{2}$$



Les nombres A, B, C désignent des mots respectivement identiques à des termes *a*, *b*, *c* de la suite des nombres.

Les relations (1) expriment que le terme *a* de la suite des nombres est antérieur au terme *b* de la même suite, et que le terme *b* est antérieur au terme *c*, ce qui s'écrit :

$$a \ll b \ll c.$$

Il en résulte que le terme *a* est antérieur au terme *c* de la suite des nombres, ce qui s'écrit :

$$a \ll c.$$

Les nombres A et C étant respectivement identiques, l'un A à un terme *a* de la suite, et l'autre C à un terme *c* de la suite postérieur à *a*, le nombre A est, par définition, plus petit que le nombre C, ce qui s'écrit :

$$A < C;$$

ce qu'il fallait démontrer.

III

RELATIONS ENTRE LES NOMBRES ET LES SYSTÈMES

Attributs numériques des systèmes. — Tout système correspondant au système formé par les termes de la suite des nombres, depuis le terme initial jusqu'au terme *n*, est dit un *système de n termes*; et le nombre *n* est dit le *nombre de termes* du système.

Lorsqu'un système S est supérieur au système constitué par les termes de la suite des nombres, il ne peut être établi de système complet de correspondance entre S et tout ou partie des nombres de la suite; car, en vertu du théorème XVII, le système S n'est, ni correspondant, ni inférieur au système constitué par les nombres de la suite. Dans ce cas, aucun terme de la suite des nombres ne pourra désigner le nombre d'éléments du système S.

Dans le cas où un système S n'est pas supérieur au système constitué par les termes de la suite des nombres, il résulte directement du théorème XX qu'on pourra toujours trouver dans la suite des nombres un nombre *n*, et un seul, qui désigne le nombre d'éléments du système S.

Tout système est donc caractérisé par cette propriété, que le nombre de ses termes peut s'exprimer par tel ou tel des termes de la suite des nombres, à l'exclusion de tout autre nombre, ou qu'il ne peut s'exprimer par aucun des termes de la suite des nombres.

Le nombre *n* de termes d'un système S est dit aussi l'*attribut numérique* du système S, car il constitue une propriété de ce système qui le distingue de tout système ayant un nombre différent de termes, ou ne pouvant être exprimé par un des termes de la suite de nombres adoptée.

Le système formé par les termes de la suite des nombres depuis le terme initial jusqu'à un terme *n* étant correspondant à lui-même, il est par définition un système de *n* termes.

On exprime que les termes de ce système sont des nombres, et que ces nombres précèdent tous les autres, en disant que c'est le système des *n premiers nombres*.

MANIÈRE USUELLE DE COMPTER LES ÉLÉMENTS D'UN SYSTÈME. — Former un système complet de correspondance entre les éléments d'un système défini de phénomènes ou d'êtres et tous les termes de la suite des nombres, depuis le terme initial jusqu'à l'un de ces nombres, de façon à trouver quel est ce nombre, s'appelle *compter* les éléments du système défini.

Pour trouver l'attribut numérique d'un système S, on forme un couple d'éléments du système S et de la suite des nombres, en choisissant pour les accoupler l'un à l'autre un élément de S et le terme initial de la suite des nombres; et lorsqu'on a constitué ce couple, on en constitue un autre formé par un élément de S qui ne fait pas partie du couple

précédent et par le terme de la suite des nombres qui suit immédiatement le terme initial.

On continue à constituer l'un après l'autre des couples d'éléments de S et de la suite des nombres, formés chacun par un élément de S choisi parmi ceux qui ne font pas partie des couples précédents, et par le nombre qui suit immédiatement celui du couple précédent.

On fait ainsi succéder un couple à un autre, jusqu'à ce que tous les éléments de S ou tous les termes de la suite des nombres aient été choisis pour former des couples, ce qui sera toujours possible si le système S est fini, comme nous l'avons établi au théorème XII (Ire partie).

Dans un cas, c'est-à-dire si l'on parvient par ce procédé de constitution de couples, à introduire successivement dans leur composition tous les éléments de S avec les éléments de la suite des nombres, depuis le terme initial jusqu'à l'un d'eux n, le nombre n introduit dans le dernier couple ainsi formé sera l'attribut numérique du système S.

En effet, d'après son mode de génération, ce système de couples est un système complet de correspondance entre les éléments de S et les termes de la suite des nombres, depuis le terme initial jusqu'au nombre n.

Dans l'autre cas, c'est-à-dire si on parvient à introduire ainsi successivement dans la composition des couples tous les termes de la suite des nombres avec une partie seulement des éléments du système S, ni le nombre introduit dans le dernier couple, ni aucun autre nombre de la suite adoptée ne sera l'attribut numérique de S.

En effet, ces couples constituent un système complet de correspondance entre tous les nombres et une partie des éléments de S. Le système S est donc supérieur au système formé par les termes de la suite des nombres adoptée. Il en résulte, comme nous l'avons établi immédiatement après la définition de l'attribut numérique d'un système, qu'aucun nombre de la suite adoptée ne sera l'attribut numérique de S.

Remarque. — Ce dernier cas ne se présentera pas si l'on fait usage d'une suite illimitée de nombres pour compter les éléments d'un système fini S. Le procédé adopté pour compter ces éléments permettra toujours de trouver dans la suite illimitée un nombre et un seul qui soit l'attribut numérique du système fini S, ainsi que cela résulte directement du théorème XXI.

Nombres concrets et nombres abstraits. — Les éléments d'un système de n termes sont des phénomènes, des êtres, des objets réels ou fictifs. Ces éléments peuvent en outre faire tous partie d'une même collection de phénomènes, d'êtres ou d'objets pouvant être désignés sous la même dénomination. On exprime alors ce fait en remplaçant dans l'expression : « Système de n éléments » le mot éléments par la dénomination collective propre à chacun des éléments du système, avec la désinence du singulier ou du pluriel, selon que l'attribut numérique du système est le premier ou tout autre terme de la suite des nombres.

On dira donc un système de n phénomènes, de n êtres, de n faits, de n objets.

On désigne encore un système qui a tel ou tel nombre pour attribut numérique, uniquement par la désignation de cet attribut numérique suivie de la dénomination collective propre aux éléments du système.

Ainsi, l'on dira : cinq chevaux, cent un coups de canon, vingt-cinq billes, trois batailles, quarante siècles, pour désigner des systèmes de cinq, de cent un, de vingt-cinq, de trois et de quarante termes, formés respectivement par des chevaux, des coups de canon, des billes, des batailles et des siècles.

Une expression formée d'un nombre n suivi d'une appellation commune à chacun des éléments d'un système de n termes est dite un *nombre concret*, tandis que chacun des éléments de la suite des nombres est dit un *nombre abstrait*.

Les éléments de la suite traditionnelle de mots qui sert à compter dans chaque langue, et que nous avons appelés des nombres, sans y joindre aucune autre qualification, sont dits, par le mathématicien allemand Helmholtz, des *nombres purs*.

Les dénominations de nombre concret et de nombre abstrait, ont leur raison d'être dans la théorie qui déduit par abstraction l'idée de nombre de celle de collection d'objets distincts, tandis que nous avons fondé directement la notion de nombre sur la faculté que possède l'homme de prononcer et de répéter à son gré une suite quelconque de paroles.

Nous verrons dans la suite, que l'abandon de la théorie du nombre tirée de la notion de collection d'objets, en faisant abstraction de la nature des objets qui constituent la collection, n'infirme en aucune façon la valeur du procédé suivi par les civilisations anciennes et modernes pour former les noms des nombres, et pour régler l'ordre dans lequel ils se suivent.

Pour parvenir à ce résultat, une suite de collections d'objets a été constituée en choisissant d'abord un seul objet, puis en joignant toujours un nouvel objet à la collection précédente pour former la suivante.

Cette suite de collections a servi à établir les noms des nombres, en tirant chacun de ces noms d'une propriété propre à une seule collection, et indépendante de la nature des objets de cette collection ; et l'ordre dans lequel les nombres se succèdent, est le même que celui des collections qui servent à former les nombres.

Nous disons seulement, que ce choix judicieux de mots et de signes qui caractérise les systèmes de numération, et qui atteint dans notre numération écrite le dernier degré de la perfection, n'est pas indispensable à la constitution d'une suite de nombres, c'est-à-dire à une suite de mots destinée à compter les éléments des systèmes d'objets. Nous établirons la parfaite légitimité des procédés employés pour former ces suites de nombres, dont les noms sont liés aux propriétés

associatives des collections d'objets qu'ils servent à compter.

Ce soin négligé jusqu'ici ne permettait pas d'établir une théorie rigoureuse de la constitution du nombre.

Relation entre l'égalité des attributs numériques de deux systèmes et la correspondance de ces systèmes. Théorème V. — **Deux systèmes A et B, qui ont pour attributs numériques des nombres égaux, sont des systèmes correspondants, et deux systèmes A et B, qui ont pour attributs numériques des nombres inégaux, sont des systèmes non correspondants.**

En effet, si nous désignons par A et B deux systèmes, par a et b les attributs numériques de A et de B, par S_a et S_b les systèmes constitués par les a et les b premiers nombres, on a les correspondances de systèmes :

$$A\,[=]\,S_a \qquad (1)$$
$$B\,[=]\,S_b. \qquad (2)$$

On a en outre par hypothèse l'égalité :

$$a = b.$$

Comme deux nombres égaux a et b sont des mots identiques l'un et l'autre à un même terme d'une suite de mots tous différents les uns des autres, le système des a premiers termes et le système des b premiers termes de la suite des nombres, désignent le même système. Les systèmes S_a et S_b sont donc correspondants ; c'est-à-dire que l'on a :

$$S_a\,[=]\,S_b. \qquad (3)$$

Il résulte de la transitivité des correspondances de systèmes que les relations (1), (2), (3) entraînent toujours la correspondance :

$$A\,[=]\,B,$$

c'est-à-dire que les deux systèmes A et B sont correspondants, ce qui démontre la première partie de la proposition.

On voit aussi, en conservant les mêmes notations, que les relations :

$$A\ [=]\ S_a \qquad (1)$$
$$B\ [=]\ S_b \qquad (2)$$

avec l'hypothèse :

$$a \neq b$$

entraînent d'abord l'anticorrespondance :

$$S_a\ [\neq]\ S_b \qquad (3)$$

et que les relations (1), (2) et (3) entraînent toujours l'anticorrespondance :

$$A\ [\neq]\ B,$$

c'est-à-dire que les deux systèmes A et B ne sont pas correspondants, ce qui démontre la seconde partie de la proposition énoncée.

Théorème VI. — Deux systèmes correspondants ont pour attributs numériques des nombres égaux, et deux systèmes non correspondants ont pour attributs numériques des nombres inégaux, quelle que soit la suite de nombres choisie pour compter ces systèmes, pourvu que chacun d'eux soit numérable avec la suite choisie.

En effet, si la suite de nombres choisie pour compter le nombre d'éléments de chacun des deux systèmes A et B est telle que A et B soient numérables à l'aide de cette suite de nombres, les systèmes A et B ont chacun pour attribut numérique un des termes de la suite choisie.

Or, il résulte du théorème précédent que si les deux systèmes A et B ne sont pas correspondants, leurs attributs numériques ne sont pas des nombres égaux. Les systèmes non correspondants A et B ayant des attributs numériques qui ne sont pas des nombres égaux, ces systèmes ont pour attributs numériques des nombres inégaux.

Il résulte encore du théorème précédent que si A et B sont correspondants, leurs attributs numériques ne sont pas des

nombres inégaux. Comme A et B ont des attributs numériques, ces deux systèmes ont pour attributs numériques des nombres égaux.

Remarque. — Si l'on se sert d'une suite illimitée de nombres pour compter les éléments d'un système S et ceux d'un système S', ces deux systèmes sont toujours numérables avec une telle suite, comme nous l'avons fait remarquer en indiquant la manière usuelle de compter les éléments d'un système.

Chacun des systèmes S et S' a donc un attribut numérique dans toute suite illimitée quelconque de nombres, et ces deux attributs seront des nombres égaux ou inégaux, selon que les systèmes S et S' seront ou ne seront pas correspondants.

On peut donc énoncer, dans ce cas particulier, le théorème précédent sous la forme suivante :

Théorème VI *bis*. — Si l'on fait usage d'une suite illimitée de nombres, les attributs numériques de deux systèmes correspondants sont toujours des nombres égaux, et les attributs numériques de deux systèmes non correspondants sont toujours des nombres inégaux.

Théorème VII. — Si deux systèmes A et B ont respectivement pour attributs numériques des nombres inégaux a et b, les systèmes A et B ne sont jamais correspondants, et le système A est toujours inférieur ou supérieur au système B, selon que le nombre a est plus petit ou plus grand que b.

Réciproquement, si les éléments de deux systèmes non correspondants A et B sont numérables à l'aide de la suite de nombres choisis pour les compter, ces deux systèmes ont pour attributs numériques des nombres inégaux a et b ; et l'attribut a de A est toujours un nombre plus petit ou plus grand que l'attribut b de B, selon que A est un système inférieur ou supérieur à B.

Démonstration. — En effet, deux systèmes A et B qui ont

respectivement pour attributs numériques des nombres inégaux *a* et *b*, sont par définition des systèmes respectivement correspondants aux systèmes S_a et S_b constitués par les *a* et les *b* premiers nombres.

On a donc les correspondances :

$$A\,[=]\,S_a \qquad B\,[=]\,S_b. \tag{1}$$

Les systèmes S_a et S_b sont toujours liés par l'une des relations :

$$S_a\,[=]\,S_b \tag{2}$$
$$S_a\,[<]\,S_b \tag{3}$$
$$S_a\,[>]\,S_b \tag{4}$$

qui sont respectivement liées aux relations de nombres :

$$a = b \qquad a < b \qquad a > b.$$

Les nombres *a* et *b* étant inégaux par hypothèse ne sont pas liés par l'égalité $a = b$; il en résulte que S_a et S_b ne sont pas liés par la relation (2), c'est-à-dire qu'on a l'anticorrespondance :

$$S_a\,[\neq]\,S_b.$$

Cette dernière relation et les relations (1) entraînent la relation :

$$A\,[\neq]\,B,$$

c'est-à-dire que les systèmes A et B, qui ont pour attributs numériques des nombres inégaux, sont des systèmes non correspondants, comme nous l'avons établi au théorème précédent.

Les systèmes S_a et S_b qui ne sont pas liés par la relation (2) sont donc liés par l'une ou l'autre des relations (3) et (4).

Si S_a et S_b sont liés par la relation (3), il résulte des propriétés de la correspondance de systèmes que cette relation et les relations (1) entraînent la relation d'infériorité

$$(\beta)\,A\,[<]\,B,$$

tandis que si S_a et S_b sont liés par la relation (4), cette relation et les relations (1) entraînent la relation de supériorité :

$$(\gamma)\, A\, [>]\, B,$$

c'est-à-dire que si deux systèmes A et B ont respectivement pour attributs numériques deux nombres inégaux *a* et *b*, le système A est inférieur ou supérieur au système B, suivant que l'attribut *a* de A est plus petit ou plus grand que l'attribut *b* de B, ce qui démontre la dernière partie de la proposition directe.

Si deux systèmes A et B ne sont pas correspondants, et s'ils sont numérables à l'aide de la suite de nombres choisie pour les compter, ils ont l'un A un attribut numérique *a*, l'autre B un attribut numérique *b*. En désignant par S_a et S_b les systèmes des *a* et des *b* premiers nombres, nous aurons donc les correspondances :

$$A\, [=]\, S_a \qquad B\, [=]\, S_b, \qquad (1)$$

et l'anticorrespondance :

$$A\, [\neq]\, B.$$

Ces trois relations entraînent toujours, d'après les propriétés transitives de la correspondance de systèmes, la relation d'infériorité :

$$S_a\, [\neq]\, S_b.$$

Il résulte de cette dernière relation que des systèmes non correspondants A et B ont pour attributs numériques des nombre inégaux, comme nous l'avons déjà établi au théorème précédent, et comme cela est rappelé à l'énoncé de la réciproque de la proposition.

Les systèmes A et B n'étant pas correspondants, sont toujours liés par l'une ou l'autre des relations d'infériorité ou de supériorité :

$$(\beta)\ A\, [<]\, B \qquad (\gamma)\ A\, [>]\, B.$$

Si les systèmes A et B, déjà liés à S_a et S_b par les relations

(1), sont liés par la relation (β), il en résulte pour les mêmes raisons que ci-dessus, que S_a et S_b sont liés par la relation d'infériorité :

$$S_a [<] S_b,$$

tandis que si A et B sont liés par la relation (γ) les systèmes S_a et S^b sont liés par la relation de supériorité :

$$S_a [>] S_b,$$

c'est-à-dire que si deux systèmes non correspondants A et B, ont l'un et l'autre des attributs numériques, l'attribut *a* de A est plus petit ou plus grand que l'attribut *b* de B, suivant que A est un système inférieur ou un système supérieur à B, ce qui démontre la dernière partie de la réciproque de la proposition.

Remarque. — Si l'on fait usage d'une suite illimitée de nombres pour compter les éléments de deux systèmes non correspondants A et B, on voit que ces systèmes ont toujours des attributs numériques inégaux, et que l'attribut *a* de A est un nombre plus petit ou plus grand que l'attribut *b* de B, suivant que A est un système inférieur ou un système supérieur à B.

Égalités et inégalités de systèmes. — Deux systèmes qui ont pour attributs numériques des nombres égaux sont dits des *systèmes égaux*.

Deux systèmes qui ont pour attributs numériques des nombres inégaux sont dits des *systèmes inégaux*.

Si deux systèmes A et B ont pour attributs numériques des nombres inégaux, A est dit un *système plus petit* que B ou un *système plus grand* que B, suivant que l'attribut numérique de A est plus petit ou plus grand que l'attribut numérique de B.

L'égalité et l'inégalité de systèmes s'exprime comme l'égalité et l'inégalité de nombres, et elle s'écrit avec les mêmes signes.

Il en est de même des expressions *plus petit* et *plus grand que*, qui s'énoncent et qui s'écrivent de la même façon, qu'elles s'appliquent à des systèmes ou à des nombres.

Théorème VIII. — Deux systèmes quelconques A et B peuvent toujours être considérés comme liés par l'une des relations :

$$A = B \qquad A < B \qquad A > B$$

et chacune de ces relations est incompatible avec chacune des deux autres.

Démonstration. — Nous avons vu qu'on peut toujours former une suite de nombres telle que les éléments de deux systèmes A et B soient numérables à l'aide de cette suite. Il suffit, pour obtenir ce résultat, de se servir d'une suite illimitée ; mais n'anticipons pas sur la possibilité de former une telle suite.

Il suit de là que deux systèmes quelconques A et B, peuvent toujours être regardés comme ayant des attributs numériques *a* et *b* déterminés en comptant les éléments de ces deux systèmes au moyen d'une suite de nombres.

Les attributs numériques de deux systèmes quelconques A et B, étant deux nombres, sont toujours égaux ou inégaux ; ce qui s'exprime en disant que A et B sont toujours liés par l'une des relations :

$$A = B \qquad A \neq B$$

et dans le cas où les attributs numériques de A et de B sont inégaux, l'attribut numérique de A est toujours plus petit ou plus grand que l'attribut numérique de B, ce qui s'exprime en disant que dans le cas où A et B sont liés par l'inégalité $A \neq B$, ces deux systèmes sont toujours liés par l'une des relations :

$$A < B \qquad A > B$$

Ces propriétés de deux systèmes A et B peuvent s'exprimer

par une seule formule, en disant qu'ils sont toujours liés par l'une des relations.

$$A = B \qquad A < B \qquad A > B. \qquad (1)$$

Si l'on désigne par a et b les attributs numériques de A et de B, les relations (1) entraînent respectivement les relations incompatibles.

$$a = b \qquad a < b \qquad a > b. \qquad (1')$$

Deux des relations (1) entraînant toujours deux des relations (1'), incompatibles entre elles, ne peuvent avoir lieu à la fois ; c'est-à-dire que chacune des relations (1) est incompatible avec chacune des deux autres.

Ainsi se trouvent établies les deux parties du théorème VIII.

Le sens conventionnel attribué aux expressions de systèmes égaux, de système plus petit ou plus grand qu'un autre, nous permet d'énoncer les théorèmes V, VI, VII sous la forme du théorème suivant :

Théorème IX. — Les relations d'égalité de systèmes :

$$A = B \qquad A < B \qquad A > B$$

entraînent respectivement les relations de correspondance.

$$A [=] B \qquad A [<] B \qquad A [>] B$$

entre deux systèmes quelconques A et B, et réciproquement.

Réflexité, symétricité, transitivité de l'égalité de systèmes. — Il résulte immédiatement du théorème précédent que l'égalité de systèmes est réflexe, symétrique et transitive comme la correspondance de systèmes.

Toutes les autres relations de correspondance qui résultent des trois propriétés fondamentales de la correspondance de systèmes, subsistent avec la substitution du mot égal à celui

de correspondant, et de plus petit ou plus grand à inférieur ou supérieur.

IV

NOMBRES ORDINAUX

Une suite de nombres ne sert pas seulement à compter les éléments de tout système de phénomènes ou d'objets distincts les uns des autres. Elle sert en outre à définir le rang de tout phénomène *a* d'une suite S, par le caractère propre à ce phénomène, d'occuper dans la suite S le même rang qu'un certain nombre *m* dans la suite traditionnelle, pourvu toutefois que le terme *a* de la suite S ne soit pas de rang supérieur à tout terme de la suite de nombres dont on fait usage.

Pour justifier cette définition du rang d'un terme *a* d'une suite S, nous montrerons tout d'abord que dans ces conditions, il existe toujours une identité de rang entre tout terme *a* d'une suite donnée de phénomènes et un terme *m* de la suite des nombres; mais qu'aucune identité de rang ne peut avoir lieu entre *a* et tout autre nombre *n* différent de *m*.

Nous démontrerons ensuite que deux termes distincts *a* et *b* d'une même suite S, ne peuvent être l'un et l'autre du même rang qu'un même terme *m* de la suite des nombres.

La première de ces propositions résulte directement du théorème XXII que nous avons établi dans la première partie, en étudiant les relations de rang qui existent entre tout terme d'une suite et chacun des termes d'une autre suite.

La seconde de ces propositions résulte de la transitivité de l'identité de rang, car les relations

$$a \boxed{\overset{r}{=}} m \qquad b \boxed{\overset{r}{=}} m$$

ne peuvent avoir lieu sans entraîner la relation

$$a \boxed{\overset{r}{=}} b$$

qui ne peut jamais avoir lieu entre deux termes *a* et *b* d'une même suite S.

Les conventions de langage qui suivent, et qui sont consacrées par l'usage, supposent essentiellement l'existence des deux propositions que nous venons d'établir. Elles permettent d'exprimer quel terme de la suite des nombres est de même rang qu'un terme *a* d'une suite donnée.

Attribut ordinal d'un terme d'une suite. — Tout terme *a* d'une suite S qui est de même rang qu'un terme *n* de la suite des nombres, est dit le *terme de $n^{\text{ième}}$ rang* de la suite S, ou le *$n^{\text{ième}}$ terme* de la suite S.

Cependant, le terme d'une suite S qui est de même rang que le terme initial de la suite des nombres, et qui est aussi le terme initial de la suite S, est dit le *terme initial* de S ou le *premier terme* de la suite S.

Le terme d'une suite S, qui succède immédiatement au terme initial, et qui est de même rang que le nombre *deux* de la suite des nombres, est dit indifféremment le *deuxième terme* de la suite S ou le *second terme* de cette suite.

Les mots *premier*, *second*, et tout autre nombre que *un* suivi de la désinence « *ième* », sont dits des *nombres ordinaux*, pour exprimer que les nombres ainsi modifiés, servent à désigner l'ordre dans lequel les différents phénomènes d'une même suite se sont accomplis.

Les nombres ordinaux prononcés, en commençant par *premier*, puis, en continuant par *second*, et ensuite par chacun des nombres suivi de la désinence *ième*, dans leur ordre naturel de succession, constituent une suite qu'on appelle la suite des nombres ordinaux.

La dénomination de $n^{\text{ième}}$ qui s'applique à un terme *a* d'une suite S, s'appelle l'*attribut ordinal* de ce terme.

Il résulte immédiatement de ces définitions et des deux propositions qui justifient la raison d'être de ces définitions les conséquences suivantes :

1° L'attribut ordinal d'un élément a d'une suite S, définit une propriété de cet élément qui le distingue de tous les autres éléments de la même suite.

En effet, si un terme a d'une suite S est le $m^{\text{ième}}$ terme de S, ce terme est, par définition, de même rang que le terme m de la suite des nombres ; et d'après les propositions précédentes, aucun autre terme de S n'est de même rang que le nombre m. Par conséquent, aucun autre terme de S n'est le $m^{\text{ième}}$ terme de la suite S.

2° Les éléments a et a' de deux suites S et S' qui ont le même attribut ordinal, sont des éléments qui occupent le même rang dans chacune des deux suites S et S'.

En effet, les éléments a et a' des deux suites S et S' sont, par définition, liés l'un et l'autre à un même nombre m par les relations d'identité de rang :

$$a \boxed{\overset{r}{=}} m \qquad a' \boxed{\overset{r}{=}} m$$

qui entraînent toujours l'identité de rang,

$$a \boxed{\overset{r}{=}} a'$$

qui signifie que les termes a de S et a' de S' occupent le même rang dans chacune des suites S et S'.

3° Réciproquement, si un élément a de S et un élément a' de S' occupent le même rang dans chacune des suites S et S', ils ont l'un et l'autre le même attribut ordinal.

En effet les éléments a de S et a' de S' sont, par hypothèse, liés l'un à l'autre par l'identité de rang :

$$a \boxed{\overset{r}{=}} a' \qquad (1)$$

Les termes a et a' sont toujours respectivement liés à des

nombres m et m' (sauf la restriction spécifiée ci-dessus) par les relations :

$$a \boxed{\overset{r}{=}} m \qquad (2)$$

$$a' \boxed{\overset{r}{=}} m' \qquad (3)$$

La transitivité des identités (1) et (2) entraîne l'identité de rang :

$$a' \boxed{\overset{r}{=}} m$$

La relation $a \boxed{\overset{r}{=}} m$ exprime que l'élément a de S est le $m^{\text{ième}}$ terme de S, tandis que la relation $a' \boxed{\overset{r}{=}} m$ exprime que a' est le $m^{\text{ième}}$ terme de S'. Les deux éléments a de S et a' de S' ont donc le même attribut ordinal.

Nombre cardinal. — L'expression de nombre *ordinal* est employée par opposition à celle de nombre *cardinal*. Cette dernière expression, qui s'applique à tout mot qui désigne un nombre, signifie que le nombre cardinal est la forme principale de l'idée de nombre, d'où l'on déduit les autres formes de cette même idée.

Attribut ordinal d'un terme de la suite des nombres. — Tout terme m de la suite des nombres, constituant avec lui-même une identité réflexe de rang, on pourra exprimer ce fait dans le langage que nous venons d'adopter, en disant que tout nombre m est le $m^{\text{ième}}$ terme de la suite des nombres.

Ordre de succession des attributs ordinaux de deux termes consécutifs d'une même suite. — Nous avons établi dans le théorème XXVII de la première partie que si un élément a d'une suite S est lié à l'élément a' d'une suite S' par l'identité de rang ;

$$a \boxed{\overset{r}{=}} a'$$

l'élément *b* de S qui suit immédiatement l'élément *a*, et l'élément *b'* de S' qui suit immédiatement *b*, sont toujours liés l'un à l'autre par l'identité de rang :

$$b \boxed{\overset{r}{=}} b'$$

En appliquant cette proposition à un terme *a* d'une suite S, et au nombre *m* d'où est tiré l'attribut ordinal de *a*, on en déduit que l'identité de rang :

$$a \boxed{\overset{r}{=}} m$$

qui a lieu, par hypothèse, entre *a* et *m* entraîne l'identité :

$$b \boxed{\overset{r}{=}} n$$

entre le terme *b* qui suit immédiatement *a* dans la suite S, et le nombre *n* qui suit immédiatement *m*.

Ceci peut s'exprimer dans le langage conventionnel que nous avons adopté, sous la forme suivante :

Théorème IX. — Si un terme *a* d'une suite S a un attribut ordinal tiré du nombre *m*, le terme suivant *b* de S a un attribut numérique tiré du nombre *n* qui suit immédiatement le nombre *m*.

Manière usuelle de déterminer les attributs ordinaux des différents termes d'une même suite. — Il résulte du théorème IX, que si l'on connaît l'attribut ordinal d'un terme *a* d'une suite S, l'attribut ordinal du terme suivant *b* de S pourra être déterminé en choisissant le nombre ordinal qui suit immédiatement l'attribut ordinal de *a*.

Nous nous servirons de cette propriété des attributs ordinaux de deux termes consécutifs d'une suite pour déterminer les attributs ordinaux de tous les termes d'une suite en désignant son terme initial par l'appellation de *premier terme*, le

suivant par l'appellation de *second terme*, le subséquent par l'appellation de *troisième terme*, et chacun des suivants dans l'ordre où ils se succèdent, par l'appellation du nombre ordinal qui suit immédiatement le nombre ordinal qui constitue l'attribut ordinal du terme précédent de S.

On parviendra par ce procédé, à dénommer par un attribut ordinal tous les nombres qui ne seront pas de rang supérieur à tout terme de la suite des nombres, c'est-à-dire que si on se sert d'une suite de nombres de n termes, on ne pourra déterminer que les attributs ordinaux des n premiers termes de la suite S. Les autres termes de la suite S n'ont pas d'attributs numériques.

Remarque. — Il faut remarquer que si l'on fait usage d'une suite illimitée de nombres, tant pour compter les éléments d'un système que pour former l'attribut ordinal de tout terme d'une suite, on pourra toujours, sans aucune des restrictions imposées précédemment, trouver un attribut ordinal pour tout terme d'une suite S, en suivant le procédé que nous venons d'indiquer.

CHAPITRE II

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES NOMBRES

I

SOMMES DE NOMBRES

Définition d'une somme de nombres. — Lorsque chacun des termes d'une somme désigne un nombre, cette somme s'appelle une somme de nombres ; et elle sert à désigner conventionnellement un autre nombre que l'on déduit des précédents par un procédé univoque.

La somme $a + b$ de deux nombres a et b sert à désigner le dernier des b premiers nombres qui suivent a dans la suite traditionnelle, ce qui peut encore s'exprimer en disant que $a + b$ désigne le $b^{\text{ième}}$ nombre qui suit a dans la suite traditionnelle.

La somme des nombres :

$$a + b + c$$

sert à désigner le même nombre que la somme :

$$(a + b) + c$$

et ainsi de suite, comme pour les systèmes totaux, une somme d'un nombre quelconque de nombres :

$$a + b + c + \dots + d + e$$

désigne le même nombre que la somme :

$$(a + b + c + \dots + d) + e,$$

ce qui fixe de proche en proche le sens conventionnel d'une somme quelconque de nombres.

Il résulte de cette définition qu'une somme $a + b$ de deux nombres désigne le nombre qui occupe dans la suite des nombres le même rang que le dernier terme d'une suite de paroles formée par la répétition de la suite des nombres de *un* à a suivie de la répétition de la suite des nombres de *un* à b.

Dans tout système de numération dont le premier terme s'appelle *un* la somme $(a + 1)$ des deux nombres a et *un* désigne le nombre qui suit immédiatement a.

Addition. — Trouver le nombre désigné par la somme $(a + b)$ de deux nombres a et b, s'appelle *ajouter* le nombre b au nombre a ; et l'opération effectuée pour trouver ce nombre s'appelle une *addition*.

Pour ajouter le nombre b au nombre a, on associe d'abord le nombre qui suit au premier terme de la suite des nombres ; et lorsqu'on a constitué ce couple, on en constitue un autre, en associant l'un à l'autre chacun des nombres qui suivent immédiatement les éléments du couple précédent.

On continue à constituer l'un après l'autre des couples formés chacun par les deux nombres qui suivent immédiatement chacun des deux nombres du couple précédent.

On fait ainsi succéder un couple à un autre, jusqu'à ce qu'on ait associé un nombre s au dernier terme de la suite des b premiers nombres, ou jusqu'à ce que l'on ait associé le dernier terme de la suite des nombres à l'un des termes de la suite des b premiers nombres, antérieur au nombre b.

Dans un cas, c'est-à-dire si l'on parvient à introduire successivement dans la composition de ces couples tous les termes de la suite des b premiers nombres, le nombre s, associé au dernier terme b de la suite des b premiers nombres, est la somme $(a + b)$, c'est-à-dire le résultat de l'addition du nombre b au nombre a.

En effet, d'après leur mode de génération, les couples établis constituent un système complet de correspondance entre

deux systèmes : l'un formé par les nombres qui sont postérieurs au nombre donné a et qui ne sont pas postérieurs au nombre trouvé s, l'autre formé par les b premiers nombres.

Il résulte de la correspondance établie entre ces deux systèmes, et de la définition du nombre d'éléments d'un système, que les éléments de la suite partielle des nombres qui commence immédiatement après a pour finir à s constituent un système de b nombres.

Le nombre s qui d'après le mode de génération des associations successives, est le dernier terme de ce système de b nombres, est donc le dernier des b premiers nombres qui suivent a.

Le nombre s est donc par définition la somme $(a + b)$ des deux nombres a et b.

Dans ce cas, le nombre des termes qui suivent a dans la suite traditionnelle adoptée n'est jamais inférieur à b.

Le nombre s que l'on obtient par ce procédé est dit le résultat de l'addition de a et de b.

Dans l'autre cas, c'est-à-dire si le procédé d'addition nous conduit à associer le dernier terme de la suite des nombres à un terme de la suite des b premiers nombres, antérieur à b, on ne trouvera jamais de nombre qui soit la somme $(a + b)$ des deux nombres a et b.

L'opération de l'addition des deux nombres a et b ne donnera donc pas de résultat; ce qui est conforme à la vérité.

En effet, le nombre des termes qui suivent a dans la suite traditionnelle est inférieur à b; aucun des nombres de cette suite partielle ne sera donc le $b^{\text{ième}}$ nombre qui suit a; et par conséquent, il n'y aura dans ce cas aucun nombre qui soit désigné par la somme $(a + b)$.

Le procédé d'addition dont nous nous sommes servis pour trouver la somme $(a + b)$ de deux nombres ne nous donnera jamais qu'un seul nombre, car le nombre ainsi trouvé est le $b^{\text{ième}}$ nombre qui suit a; et, d'après la définition de l'attribut

ordinal, un seul terme d'une suite peut être le $b^{\text{ième}}$ terme de cette suite.

Remarque.— Si l'on fait usage pour les différentes opérations de l'arithmétique d'une suite illimitée de nombres, il y a toujours un nombre de cette suite qui est la somme $(a + b)$ de deux nombres a et b ; et le procédé d'addition que nous venons de décrire nous permettra toujours de trouver ce nombre.

Univocité de l'addition des nombres. — Le procédé de l'addition est univoque, c'est-à-dire qu'il donne le même nombre pour une somme $a + b$ et pour tout autre somme $a' + b'$, constituées l'une et l'autre par des nombres respectivement égaux rangés dans le même ordre.

En effet, on ne peut trouver par ce procédé de l'addition qu'un seul nombre s pour la somme $a + b$, et un seul nombre s' pour la somme $x' + b'$.

Or, des égalités :

$$a = a' \qquad b = b'$$

qui lient, par hypothèse, les termes des sommes $a + b$ et $a' + b'$, il résulte que les nombres s et s' qui sont, l'un le $b^{\text{ième}}$ nombre qui suit a, l'autre le $b^{\text{ième}}$ nombre qui suit a', sont l'un et l'autre le $b^{\text{ième}}$ terme qui suit a.

Or, il a été établi comme conséquence première de la définition de l'attribut ordinal, qu'un seul terme est le $b^{\text{ième}}$ terme de la suite partielle formée par les nombres qui suivent un nombre a.

Le nombre s et le nombre s' qui sont l'un et l'autre le $b^{\text{ième}}$ terme de cette suite désignent donc le même nombre, c'est-à-dire qu'on a :

$$s = s'.$$

Les nombres s et s' trouvés en additionnant le nombre b au nombre a et le nombre b' au nombre a', sont donc aussi des nombres égaux.

On peut exprimer cette propriété de l'addition des nombres sous la forme suivante :

THÉORÈME X. — L'addition d'un même nombre à des nombres égaux entre eux donne des résultats égaux.

REMARQUE. — Il faut remarquer que la somme $a + b$ de deux nombres ne peut avoir de signification que si la suite dont on se sert a au moins b termes après le nombre a.

Si cette condition n'est pas remplie, le procédé d'addition ne donne aucun nombre pour la somme $a + b$.

Toute restriction disparaît, si l'on fait usage d'une suite illimitée de nombres.

ASSOCIATIVITÉ DE L'ADDITION DES NOMBRES. — Nous allons démontrer que l'égalité :

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad (1)$$

est vraie quels que soient les nombres désignés par a, b, c, ce qui s'exprime en disant que la somme est associative.

L'égalité (1) est vraie pour $c = 1$.

On a :

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \qquad (2)$$

En effet, $a + b$ est le $b^{\text{ième}}$ nombre qui suit a, $a + (b + 1)$ est le $(b + 1)^{\text{ième}}$ nombre qui suit a.

Donc $a + (b + 1)$ est le nombre qui suit $a + b$; $(a + b) + 1$ désigne aussi le nombre qui suit $a + b$.

Donc, $a + (b + 1)$ et $(a + b) + 1$ désignent le même nombre, ce qui s'exprime par l'égalité :

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1.$$

L'égalité (2) est donc vraie.

Admettons que l'égalité (1) soit vraie pour $c = n$, ce qui s'exprime :

$$a + (b + n) = (a + b) + n. \qquad (3)$$

Je vais montrer qu'elle subsiste pour $c = n + 1$.

En effet, on vérifie que les égalités :

$$a + [b + (n + 1)] = a + [(b + n) + 1] = [a + (b + n)] + 1 = [(a + b) + n] + 1 = (a + b) + (n + 1)$$

sont vérifiées, car le premier terme désigne le même nombre que le second, en vertu de (2); de même pour le second et le troisième, en vertu de (2) ; de même pour le troisième et le quatrième, en vertu de (3); de même pour le quatrième et le cinquième, en vertu de (2).

Donc, on a :

$$a + [b + (n + 1)] = (a + b) + (n + 1).$$

ce qui exprime que l'égalité $a + (b + c) = (a + b) + c$ vraie pour $c = n$, est vraie pour $c = n + 1$.

Vraie pour $c = 1$, elle est vraie par cela même pour $c = 1 + 1 = 2$, pour $c = 2 + 1 = 3$, pour $c = 3 + 1 = 4$ etc., elle est vraie quel que soit c.

Remarque. — Comme les deux termes de l'équation (2) désignent le même nombre, et que l'un d'eux $(a + b) + c$ désigne, par définition, le même nombre que $a + b + c$, il résulte de la transitivité de l'égalité, que l'on a, en supprimant les parenthèses,

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c). \qquad (2a)$$

Généralisation de la loi d'association. — Nous généralisons la relation (2a) en l'étendant à l'égalité des deux sommes de nombres :

$$a + \dots + b + c + d + f + \dots + g = a + \dots + b + (c + d) + f + \dots + g. \qquad (2b)$$

On a l'égalité :

$$a + \dots + b + c + d + f + \dots + g = [(a + \dots + b) + c + d] + f + \dots + g \qquad (1)$$

parce que les deux termes de l'égalité sont, par définition, des expressions équivalentes du même nombre.

D'autre part, on a, d'après l'égalité (2a) :

$$(a + \ldots + b) + c + d = (a + \ldots + b) + (c + d). \qquad (2)$$

Il vient donc, en remplaçant dans le second membre de l'égalité (1) la partie entre parenthèses par le second membre de l'égalité (2), qui désignent l'un et l'autre le même nombre,

$$a + \ldots + b + c + d + f + \ldots + g = [(a + \ldots + b) + (c + d)]$$
$$+ f + \ldots + g = a + \ldots + b + (c + d) + f + \ldots + g,$$

c'est-à-dire, qu'au lieu d'additionner successivement deux termes consécutifs d'une somme de nombres au résultat de l'addition des termes précédents, on peut toujours faire d'abord l'addition des deux termes consécutifs et ajouter le résultat à la somme des termes précédents.

Quand on a associé deux termes consécutifs c et d d'une somme de nombres, on peut associer à cette somme de deux termes le terme suivant f pour former la somme $c + d + f$, c'est-à-dire, qu'au lieu d'additionner successivement deux termes consécutifs quelconques de la somme au résultat de l'addition des termes précédents, on peut d'abord faire la somme de ces deux termes consécutifs, et ajouter ensuite le nombre trouvé au résultat de l'addition des termes précédents.

Quand on a ainsi associé l'un à l'autre deux termes consécutifs c et d, la somme $(c + d)$ ne figure plus dans la somme générale que pour un seul terme $(c + d)$ qu'on peut associer au terme suivant f pour former le nombre $[(c + d) + f]$ qui s'énonce $(c + d + f)$ et que l'on peut substituer aux additions successives des nombres c, d et f indiquées dans la somme avant l'association de ces trois termes consécutifs.

On peut continuer à associer ainsi aux termes précédents, le terme qui suit immédiatement le dernier des nombres précédemment associés, sans changer le nombre désigné par la somme générale.

Il en résulte qu'en continuant ainsi, on pourra associer un

nombre quelconque de termes consécutifs d'une somme de nombres, sans changer le résultat de cette somme.

COMMUTATIVITÉ DE L'ADDITION DES NOMBRES. — Si l'égalité $a+1=1+a$ est vraie quand a désigne un nombre n, elle est vraie quand a désigne le nombre suivant $n+1$.

On a par hypothèse :

$$n+1=1+n. \tag{4}$$

On peut vérifier que les égalités

$$(n+1)+1=(1+n)+1=1+(n+1)$$

sont vraies, en vertu des égalités (4) et (2).

Il en résulte que l'on a :

$$(n+1)+1=1+(n+1),$$

ce qui exprime que si l'égalité

$$a+1=1+a \tag{5}$$

est vraie pour $a=n$, elle est vraie pour $a=n+1$.

Comme elle est vraie pour $a=1$, il en résulte que l'égalité (5) est vraie quel que soit le nombre désigné par a.

Si l'égalité :

$$a+b=b+a \tag{6}$$

est vraie pour

$$b=n,$$

on a :

$$a+n=n+a \tag{7}$$

et en vertu de (2) et de (7), on a :

$$a+(n+1)=(a+n)+1=(n+a)+1=n+(a+1)=n+(1+a)=(n+1)+a.$$

Il en résulte que si l'égalité (6) est vraie pour $b=n$, elle est vraie pour $b=n+1$.

Comme elle est vraie pour $b=1$, il en résulte qu'elle est vraie quel que soit le nombre désigné par b et aussi par a.

On exprime ce théorème en disant que la somme $a + b$ est commutative.

Généralisation de la commutativité des termes d'une somme de nombres. — 1° Les deux termes extrêmes x et y d'une somme de trois nombres $y + m + y$ peuvent être permutés sans changer le résultat de l'addition des trois termes de cette somme, c'est-à-dire qu'on a l'égalité :

$$x + m + y = y + m + x \qquad (1)$$

car, d'après les propositions précédentes, on a successivement les égalités :

$$\begin{aligned} x + m + y &= x + (m + y) \\ &= (m + y) + x \\ &= (y + m) + x \\ &= y + m + x \end{aligned}$$

2° Le premier et le dernier terme d'une somme de nombres peuvent être permutés sans changer le résultat de la somme, c'est-à-dire qu'on a l'égalité :

$$x + a + .. + b + y = y + a + .. + b + x \qquad (2)$$

car les deux membres de cette égalité constituent des expressions respectivement équivalentes aux sommes de trois nombres :

$$x + (a + .. + b) + y \quad , \quad y + (a + .. + b) + x$$

ne différant l'une de l'autre que par la permutation des termes extrêmes ; ce qui ne change pas le nombre représenté par ces sommes.

3° Deux termes quelconques x et y d'une somme :

$$a + .. + b + x + c + .. + d + y + f + .. + g \qquad (3)$$

constituée par n'importe quelle succession de nombres, peuvent être permutés sans changer le résultat de la somme, car d'après l'alinéa 2° on a l'égalité :

$$x + c + .. + d + y = y + c + .. + d + x.$$

Il en résulte d'après l'univocité de l'addition (théorème X) que l'on a l'égalité :

$$(a + .. + b) + (x + c + .. + d + y) + (f + .. + g) =$$
$$(a + .. + b) + (y + c + .. + d + x) + (f + .. + g)$$

d'où, en vertu de l'associativité, on déduit l'égalité :

$$a + .. + b + x + c + .. d + y + f + .. + g =$$
$$a + .. + b + y + c + .. + d + x + f + .. + g$$

qui établit que la somme (3), désigne le même nombre qu'une autre somme qui ne diffère de (3) que par la permutation de deux termes quelconques x et y.

4° On peut donc amener tout terme d'une somme quelconque de nombres, à occuper dans cette somme le rang occupé par tout autre terme de la somme, ce qui permet de ranger les différents termes d'une somme quelconque de nombres dans n'importe quel ordre, sans changer le nombre désigné par la somme.

Univocité, commutativité, associativité de l'addition des nombres. — Les relations d'égalité que nous venons d'établir entre des sommes formées respectivement par les mêmes nombres rangés dans un ordre différent ou associés les uns aux autres de différentes façons s'expriment brièvement en disant que l'addition des nombres est *univoque*, *commutative* et *associative*.

Relations entre une somme et ses différentes parties. Théorème XI. — Toute somme de nombres est plus grande que chacune de ses parties.

En effet, lorsque la somme $a + b$ définit un nombre s, ce nombre est le dernier des b premiers nombres qui suivent a. Il est donc, par définition, postérieur à a et le nombre $a + b$ postérieur à a est, par définition, plus grand que a.

Lorsque l'expression $a + b$ définit un nombre s, le système S_s^a, constitué par les b premiers nombres qui suivent a, est un

système partiel du système S_s constitué par les a premiers nombres et par les b nombres qui suivent a.

Il résulte immédiatement de la réflexité de la correspondance de systèmes, qu'on a l'antériorité.

$$S_s^a \,[<]\, S_s$$

Le nombre b qui est, par définition, l'attribut numérique de S_s^a est donc inférieur au nombre s, qui est l'attribut numérique de S_s comme nous l'avons démontré au théorème VII, en établissant l'équivalence de désignations de systèmes correspondants ou de systèmes égaux. On a donc toujours l'inégalité,

$$b < s$$

On en déduit qu'entre le nombre b et la somme $a + b$ définie par l'équivalence de désignations,

$$a + b <> s$$

on a la relation de minorité

$$b < a + b$$

toutes les fois que la somme $a + b$ de deux nombres désigne un nombre s.

On voit facilement comment on peut étendre cette démonstration à une somme constituée par un nombre quelconque de parties.

En effet, si le théorème XI est vrai pour une somme :

$$a + b + .. + c \qquad (1)$$

il est vrai pour la somme :

$$a + b + .. + c + d \qquad (2)$$

constituée par les mêmes termes que la somme (1) et par un autre terme d.

En effet, la somme (2) peut être désignée par l'expression algébrique équivalente :

$$(a + b + .. + c) + d$$

qui est une somme de deux nombres :

$$(a + b + .. + c) \text{ et } d.$$

La somme (2) est, d'après la démonstration précédente, plus grande que la partie d de cette somme.

La somme (2) est aussi plus grande que la partie $(a + b... + c)$ de cette somme.

On a donc :

$$a + b + .. + c + d > a + b + .. + c. \qquad (3)$$

Mais on a par hypothèse la majorité numérique :

$$a + b + . + c > x \qquad (4)$$

dans laquelle x désigne tout élément de la somme (1).

Il résulte des relations (3) et (4), d'après les propriétés dérivées de la transitivité des égalités de nombres, que l'on a la relation :

$$a + b + .. + c + d > x.$$

La somme (2) est donc plus grande que chacune des parties de cette somme.

Le théorème XI, vrai pour une somme de deux nombres, est donc vrai pour une somme de trois nombres ; et il est vrai de proche en proche pour une somme quelconque de nombres.

Théorème XII. — Si un nombre b est plus petit qu'un nombre a, on peut toujours trouver un nombre d tel que la somme $b + d$ soit égale à a.

En effet, lorsqu'un nombre b est plus petit qu'un nombre a le nombre b précède, par définition, le nombre a dans la suite adoptée comme système de numération.

Tout nombre x qui précède b précède a, car on a, par hypothèse, les antériorités de paroles :

$$x \ll b \text{ et } b \ll a$$

qui, d'après la transitivité de l'antériorité de paroles, entraînent toujours la relation :

$$x \ll a.$$

Le nombre b partage la suite des a premiers nombres en deux parties formées : l'une par la suite des b premiers nombres, et l'autre par les nombres qui suivent b.

Chacun des b premiers nombres fait partie de la suite des a premiers nombres, puisque le nombre b précède, par hypothèse, le nombre a, et que tout autre terme de la suite des b premiers nombres précède a.

Le système S_a des a premiers nombres n'est pas constitué seulement par les b premiers nombres, puisque le nombre a, postérieur à b, fait partie de S_a, qui est formé en outre par les nombres, intermédiaires à a et à b, s'il en existe.

Les éléments de S_a qui ne font pas partie des b premiers nombres constituent donc un système S partiel du système S_a.

Un système S étant toujours correspondant à lui-même, on pourra établir un système complet de correspondance entre les éléments de S et les éléments de la partie du système S_a constitué par les éléments de S, ce qui s'exprime en disant que S est lié à S_a par la relation d'infériorité,

$$S[<]S_a.$$

Le système S étant inférieur au système S_a constitué par les a premiers nombres, il résulte du théorème XX de la première partie qu'on peut toujours trouver dans la suite des a premiers nombres, un terme d et un seul tel que les d premiers nombres constituent un système S_d correspondant à S.

Le nombre d ainsi trouvé est, par définition, l'attribut numérique du système S.

Les termes de la partie de la suite des a premiers nombres, formée par les nombres de cette suite, postérieurs à b, constituent le système S.

Cette partie de la suite des a premiers nombres est donc une suite de d termes.

Il en résulte qu'elle est formée par les d premiers nombres qui suivent b; et le nombre a qui est le dernier de ces d nombres est, par définition, désigné par la somme $b + d$.

Lorsqu'un nombre b est plus petit qu'un nombre a, on peut donc toujours trouver un nombre d tel que l'on ait l'égalité,

$$b+d=a.$$

Autre manière de définir les relations de minorité et de majorité entre deux nombres inégaux. — Il résulte immédiatement des deux théorèmes précédents que la relation de minorité de deux nombres

$$b < a \quad (1)$$

qui existe entre deux nombres a et b telle que nous l'avons définie entraîne toujours l'égalité

$$b+d=a. \quad (2)$$

et que réciproquement l'égalité (2) entraîne toujours l'égalité (1), c'est-à-dire que si un nombre b est plus petit qu'un nombre a, on peut toujours trouver un nombre d qui vérifie l'égalité (2), et que si on peut trouver un nombre d qui vérifie l'égalité (2) le nombre b est plus petit que a.

La minorité d'un nombre b sur un nombre a pourra donc se définir, en disant que a et b sont des nombres tels qu'on puisse toujours trouver un nombre d qui vérifie l'égalité (2).

On voit de même que la majorité d'un nombre b sur un nombre a, peut être définie par la possibilité de trouver un nombre qui vérifie l'égalité

$$a+d=b \quad (3)$$

RELATIONS D'ÉGALITÉ ENTRE DEUX SOMMES DE NOMBRES. — Si deux nombres sont différents, l'un d'eux b est plus petit que l'autre a. Dans ce cas, on pourra toujours trouver, comme nous venons de le démontrer, un nombre d tel que :

$$b + d = a.$$

Il en résulte, d'après l'univocité de l'addition, que l'on a l'égalité

$$(b + d) + c = a + c$$

quel que soit le nombre choisi pour c, pourvu toutefois que le nombre a soit suivi par c autres nombres dans le système de numération choisi.

On en déduit, d'après l'associativité de l'addition

$$(b + c) + d = (a + c).$$

Or, il résulte du mode de formation d'une somme, que le nombre $(b + c) + d$ ou $(a + c)$ est plus grand que $(b + c)$, ce qui peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME XIII. — Un même nombre ajouté à des nombres, différents donne des résultats différents.

Il résulte encore de l'univocité de l'addition des nombres que l'égalité :

$$b + d = a$$

établie ci-dessus, entraîne :

$$c + (b + d) = c + a,$$

d'où il résulte, d'après l'associativité de l'addition :

$$(c + b) + d = (c + a)$$

et, d'après le théorème X, l'inégalité :

$$c + b \neq c + a,$$

et peut s'énoncer :

Théorème XIV. — Des nombres différents, ajoutés à un même nombre, donnent des résultats différents.

On déduit de ce théorème la proposition suivante, importante pour la théorie de la soustraction et des autres opérations arithmétiques.

Théorème XV. — Deux nombres qui, ajoutés chacun à un même nombre donnent des résultats identiques, doivent être identiques.

Car si ces deux nombres n'étaient pas identiques, l'addition de chacun d'eux à un même nombre devrait donner, d'après le théorème XIV, des résultats différents, ce qui serait incompatible avec l'hypothèse du théorème XV.

II

PROPRIÉTÉS DES SOMMES DE SYSTÈMES

Relations d'égalité et d'inégalité entre deux sommes de systèmes. — Plusieurs ensembles A, B,..., C de phénomènes, d'objets, d'êtres réels ou fictifs, distincts les uns des autres, constituent un nouvel ensemble T formé par tous les éléments de A, B,..., C, et que nous avons appelé le système total des systèmes partiels A, B..., C.

Nous avons défini, dans la première partie de ce travail, l'addition des ensembles de phénomènes, d'objets, etc., c'est-à-dire la somme de systèmes. Nous avons aussi établi une partie des propriétés de ces sommes.

Dans la deuxième partie, nous avons défini l'égalité et l'inégalité de deux ensembles. Nous avons en outre établi les propriétés de ces ensembles qui résultent de la définition de leur égalité.

Il nous reste maintenant à établir les relations d'égalité ou d'inégalité qui existent, soit entre les systèmes partiels d'une somme de systèmes et cette somme, soit entre deux sommes de systèmes, et qui résultent directement des propositions

que nous venons d'établir entre les sommes de nombres.

On voit que le procédé d'association dont on se sert pour établir la somme de deux ensembles A et B, est univoque ; c'est-à-dire que si deux ensembles A′ et B′ sont liés respectivement aux ensembles A et B par les égalités :

$$A = A' \qquad B = B'$$

il en résulte toujours qu'on a entre les sommes A + B et A′ + B′ l'égalité :

$$A + B = A' + B'.$$

En effet, on a vu que, des égalités de systèmes :

$$A = A' \text{ et } B = B'$$

il résulte toujours les correspondances :

$$A [=] A' \text{ et } B [=] B'.$$

De ces deux dernières relations, on tire la correspondance :

$$A + B [=] A' + B',$$

d'où l'on déduit l'égalité :

$$A + B = A' + B'.$$

On voit de même que l'équivalence de désignations :

$$A + B \langle\rangle B + A$$

établie dans la première partie, entraîne la correspondance :

$$A + B [=] B + A,$$

et de cette correspondance, résulte l'égalité :

$$A + B = B + A.$$

quels que soient les systèmes A et B, pourvu que leur somme soit numérable.

On voit par le même procédé qu'on a l'égalité :

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

quels que soient les systèmes désignés par A, B, C : car de l'équivalence des désignations :

$$A + (B + C) \langle\rangle (A + B) + C$$

établie dans la première partie, on déduit successivement la correspondance :

$$A + (B + C) [=] (A + B) + C,$$

et finalement l'égalité :

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

pourvu que le système défini par les désignations équivalentes des deux membres de cette égalité soit numérable.

Univocité, commutativité, associativité de l'addition des ensembles d'objets distincts. — Ces trois propositions ne sont que des extensions des propriétés des nombres aux ensembles d'objets distincts.

Elles expriment que la somme d'ensembles d'objets distincts est univoque, commutative et associative, comme la somme de nombres.

On pourra de même étendre à des ensembles d'objets les théorèmes, de X à XVI, qui expriment des propriétés relatives à des nombres.

En effet, il résulte de l'univocité de la somme de systèmes la proposition suivante :

Théorème X *bis*. — L'addition d'un même système à des systèmes égaux entre eux, donne des systèmes égaux, et l'addition de deux systèmes égaux entre eux à un même système, donne aussi des systèmes égaux.

Une somme de deux ensembles quelconques A et B désigne

le système total constitué par les éléments de A et de B. On a donc les infériorités de systèmes :

$$A [<] A + B \qquad B [<] A + B.$$

D'où il résulte :

$$A < A + B \qquad B < A + B$$

ce qui s'exprime ainsi :

Théorème XI *bis*. — Toute somme d'ensembles est plus grande que chacune de ses parties.

Théorème XII *bis*. — Si un système B est plus petit qu'un système A, on peut toujours trouver un système D tel que la somme B + D soit égale à A.

En effet, on a par hypothèse l'inégalité de systèmes :

$$B < A,$$

d'où l'on déduit l'infériorité de système :

$$B [<] A.$$

On peut toujours trouver, comme nous l'avons établi, un système D tel que l'on ait la correspondance :

$$B + D [=] A.$$

Il en résulte l'égalité :

$$B + D = A$$

ce qui établit la proposition.

Théorème XIII *bis*. — Un même système ajouté à des systèmes inégaux, donne des systèmes inégaux.

Théorème XIV *bis*. — Des systèmes inégaux ajoutés à un même système, donnent des systèmes inégaux.

En effet, étant donnée l'hypothèse que deux systèmes sont

inégaux, il résulte du théorème VIII que l'un d'eux B est plus petit que l'autre A, ce qui s'exprime par l'inégalité :

$$B < A$$

qui entraîne l'infériorité de systèmes :

$$B [<] A.$$

Or, nous avons vu dans la première partie que, dans ces conditions, on peut toujours trouver un système D tel que l'on ait la correspondance :

$$B + D [=] A,$$

d'où il résulte :

$$B + D = A.$$

Si l'on choisit un nombre quelconque X, on a, d'après le théorème X *bis* :

$$(B + D) + X = A + X,$$

d'où :

$$(B + X) + D = A + X,$$

d'où :

$$(X + B) + D = (X + A),$$

il en résulte :

$$B + X < A + X$$
$$X + B < X + A.$$

Ce qui établit les deux théorèmes XIII *bis* et XIV *bis*.

Théorème XV *bis*. — Deux systèmes qui ajoutés chacun à un même système donnent des résultats égaux, doivent être égaux.

Car si ces deux systèmes n'étaient pas égaux, l'addition de chacun d'eux à un même système devrait donner, d'après le théorème XIV *bis*, des résultats inégaux, ce qui serait incompatible avec l'hypothèse du théorème XV *bis*.

Ainsi la dernière relation d'égalité ou d'inégalité que nous ayons établie entre des nombres ou des sommes de nombres,

se trouve-t-elle étendue, comme toutes les autres, à des ensembles d'objets distincts.

Bases sur lesquelles reposent les propriétés des nombres et des ensembles. — Toutes les propriétés des nombres sont démontrées en se fondant sur les définitions que nous avons adoptées pour l'égalité et pour l'addition.

Ces propriétés du nombre reposent uniquement sur les dix-huit principes tirés de l'observation psychologique que nous avons établis, dans la première partie de ce travail, pour servir de base à la théorie des suites de paroles.

Les propriétés des ensembles d'objets distincts qui reposent sur les mêmes principes que les propriétés des nombres, sont fondées en outre sur le concept de la permanence des objets introduit dans la représentation du monde extérieur et sur les lois expérimentales qui servent de base à cette conception.

III

CONCEPTION SÉCULAIRE DE LA SOMME DE NOMBRES

Accord entre la conception séculaire et la définition moderne de la somme de nombres. — La démonstration des propriétés du nombre et des sommes de nombres que nous venons d'établir, repose sur la définition que nous avons choisie de l'égalité et de la somme des nombres.

Les propriétés ainsi établies sont déduites des définitions adoptées.

Il reste à prouver que ces définitions s'accordent avec celles qui nous sont transmises par la tradition séculaire. Le nombre, d'après l'enseignement traditionnel était l'attribut numérique des ensembles de phénomènes, d'objets ou d'êtres distincts les uns des autres et extérieurs à nous ; et la somme de deux nombres *a* et *b* était l'attribut numérique du système total de deux systèmes A et B constitués respectivement par *a* et *b* éléments. Le nombre défini comme un attribut numé-

rique d'un ensemble d'objets est encore un nombre, comme ceux dont nous avons défini l'égalité.

La somme de deux nombres a et b, définie comme l'attribut numérique de la somme de deux ensembles A_a et B_b, constitués respectivement par a et b éléments, concorde avec la somme antérieurement définie de deux nombres, car il résulte des propriétés établies pour les nombres et les systèmes d'objets distincts que :

Théorème XVI. — Le nombre total des termes de deux ensembles d'objets distincts, n'ayant aucun terme commun, est égal, d'après la définition que nous avons donnée de l'addition, à la somme des attributs numériques des termes des deux ensembles.

Démonstration. — En effet les ensembles A_a et B_b de a et de b objets distincts, sont correspondants l'un A_a à la somme S_a des a premiers nombres, l'autre B_b à la somme des b nombres qui suivent a.

Le système total T des ensembles A_a et B_b, est donc correspondant au système constitué par les a premiers nombres, suivis par les b premiers nombres qui succèdent à a. Le dernier terme de cette suite est, d'après nos définitions, la somme $a + b$ des deux nombres a et b et le système S_{a+b} constitué par les $(a + b)$ premiers nombres est correspondant à T, ce qui s'exprime :

$$S_{a+b} [=] T.$$

Il en résulte d'après le théorème IX

$$S_{a+b} = T$$

et, d'après la définition de la somme de deux systèmes,

$$S_{a+b} = A_a + B_b.$$

La nouvelle définition de la somme $(a + b)$ de deux nombres a et b désignant le même nombre que celui qui est tiré

de la conception primitive de la somme $a + b$ des deux nombres a et b, il en résulte que les sommes tirées de l'ancienne conception jouissent de toutes les propriétés que nous avons établies pour les sommes de nombre formés par le nouveau procédé.

Il est donc démontré que la conception séculaire des sommes de nombres nous fournit des nombres qui jouissent des propriétés constitutives d'une suite de nombres sans qu'il soit nécessaire de considérer ces propriétés comme des axiomes que l'on plaçait en tête des théories de l'arithmétique.

Substitution des nombres aux ensembles numérables. — Il résulte immédiatement du théorème précédent que l'égalité

$$A + B = C$$

qui existe entre la somme A + B de deux ensembles A et B d'objets distincts et un autre ensemble C entraîne l'égalité

$$a + b = c$$

formée en remplaçant chacun des termes de la première par son attribut numérique; et réciproquement la seconde de ces égalités entraîne toujours la première.

On exprime encore ce fait en disant que dans l'égalité d'ensembles d'objets distincts A + B = C, on peut toujours remplacer les ensemble A, B, C par leurs attributs respectifs sans altérer le caractère d'égalité de cette expression algébrique.

IV

LES SYSTÈMES DE GRANDEURS

Systèmes de grandeurs constitués par les nombres ou par des ensembles d'objets distincts. — Les ensembles d'objets distincts, leur égalité, leur somme et leur inégalité, tels que nous venons de les définir, jouissent, comme les nombres, des trois propriétés suivantes :

1° L'égalité de ces ensembles est réflexe, symétrique et transitive ;

2° La somme de ces ensembles est univoque, commutative et associative ;

3° Deux ensembles A et B sont toujours liés par l'une des relations :

$$A = B \qquad A < B \qquad A > B$$

et chacune de ces relations est incompatible avec chacune des deux autres.

Définition des systèmes de grandeurs. — Tout système dont l'égalité, la somme et les inégalités ont été définies de façon à jouir des trois propriétés précédentes, est dit un *système de grandeurs*, et les éléments du système sont dits des *grandeurs de même espèce*.

Il convient d'ajouter que la relation :

$$A < B \text{ ou } A > B$$

qui existe toujours entre deux grandeurs inégales de même espèce, signifie qu'on peut toujours trouver une troisième grandeur D du système telle que :

$$B = A + D \text{ ou } A = B + D$$

Cette définition de la majorité ou de la minorité d'une grandeur sur une autre, n'entraîne pas une quatrième propriété fondamentale des systèmes de grandeurs ; elle ne fait que baser cette définition sur l'égalité et la somme définies d'un système de grandeur.

Corollaires résultant des propositions fondamentales des systèmes de grandeurs. — Tout système de grandeurs, c'est-à-dire tout système jouissant des trois propriétés fondamentales qui constituent un système de grandeurs, jouit en outre d'un certain nombre de propriétés, qui sont la conséquence directe des trois propositions fondamentales.

Ces propriétés dérivées sont énoncées dans l'annexe à la

géométrie de MM. Louis Gérard et Nievengloswki, sous la forme des corollaires suivants, dans lesquels les lettres majuscules désignent des grandeurs :

1° Les relations $A = B$ et $B < C$ entraînent la relation

$$A < C.$$

Car $B < C$ exprime, par définition, qu'il y a une grandeur D telle que

$$B + D = C$$

et de l'univocité de l'addition, il résulte :

$$A + D = B + D$$

d'où :

$$A + D = C$$

qui s'exprime par définition :

$$A < C;$$

2° Les relations $A < B$ et $B = C$ entraînent la relation

$$A < C.$$

Car $A < B$ entraîne par définition l'égalité :

$$A + D = B$$

qui, avec

$$B = C$$

entraîne successivement :

$$A + D = C$$
$$A < C;$$

3° Les relations $A < B$ et $B < C$ entraînent la relation

$$A < C.$$

Car on a : $A + D = B$, qui avec $B < C$ entraîne :

$$A + D < C$$

On a successivement :

$$(A + D) + E = C$$
$$A + (D + E) = C$$
$$A < C;$$

4° La relation $A < B$ entraîne $A + C < B + C$, car il y a toujours une grandeur D telle que $A + D = B$.

Or, on a, d'après les propriétés de l'addition :

$$B + C = (A + D) + C = (A + C) + D$$

et d'après la définition de l'inégalité :

$$A + C < B + C.$$

Réciproquement

$$A + C < B + C$$

entraîne

$$A < B$$

et

$$A + C = B + C$$

entraîne

$$A = B.$$

Car dans le premier cas, on ne peut avoir, ni $A = B$, ni $A > B$ qui entraîne, l'un $A + C = B + C$, l'autre $A + C > B + C$, incompatibles l'un et l'autre avec $A + C < B + C$.

Dans le second cas, on ne peut avoir, ni $A < B$, ni $A > B$ qui entraînent l'un et l'autre des relations $A + C < B + C$ et $A + C > B + C$, incompatibles avec $A + C = B + C$.

Différence de deux grandeurs. — Nous avons vu qu'il résulte des propriétés fondamentales des systèmes de grandeurs, et de la définition de la minorité et de la majorité d'une grandeur sur une autre, que si deux grandeurs sont liées par la relation :

$$B < A$$

on peut toujours trouver une grandeur D du même système telle que :

$$B + D = A.$$

Il résulte de la transitivité de l'égalité, que si l'on trouve une autre grandeur D′ telle que l'on ait :

$$B + D' = A.$$

on aura l'égalité :

$$B + D = B + D'$$

qui entraîne, d'après le dernier corollaire l'égalité :

$$D = D'.$$

Donc, toutes les grandeurs X d'un même système liées à A et à B par la relation $B + X = A$ sont égales entre elles.

On désigne l'une quelconque d'entre elles par A — B et on l'appelle la différence des grandeurs A et B.

Il résulte des propriétés des grandeurs, que si deux grandeurs A et B de même espèce sont égales, il ne peut y avoir de grandeur de la même espèce qui soit la différence des deux premières ; tandis que si deux grandeurs A et B sont inégales, il y a toujours une grandeur D de même espèce qui est la différence de A et de B, c'est-à-dire telle que l'on ait :

$$D = A - B \text{ ou } D = B - A.$$

Soustraction. — Trouver la grandeur désignée par la différence A — B de deux grandeurs A et B s'appelle *soustraire* ou *retrancher* B de A ; l'opération effectuée pour trouver cette grandeur s'appelle une *soustraction*.

V

DIFFÉRENCE DE DEUX NOMBRES

Les nombres constituant un système de grandeurs, il y a toujours dans la suite des nombres un terme qui est la différence de deux nombres donnés différents, c'est-à-dire de deux nombres donnés inégaux.

Procédé usuel pour retrancher un nombre *b* d'un autre

NOMBRE a PLUS GRAND QUE b. — Nous avons vu que si un nombre a est plus grand qu'un nombre b, il existe toujours un nombre d plus petit que a, tel que l'on ait

$$b+d=a. \tag{1}$$

C'est ce nombre d désigné par l'expression $a - b$ qu'il s'agit de trouver.

Or, la suite S_a des a premiers nombres est partagée par le nombre b plus petit que a en deux suites : l'une S_b formée par les b premiers nombres, l'autre R formée par les termes de S_a postérieurs à b.

Il résulte de l'égalité (1) que le nombre a est, par définition de la somme de deux nombres, le dernier des d termes qui suivent immédiatement le nombre b.

La suite des nombres qui commence immédiatement après le nombre b pour finir avec le nombre a, est donc une suite de d termes.

On trouvera donc le nombre d en cherchant l'attribut numérique du système R′ constitué par les termes de la suite R, c'est-à-dire par les termes de la suite S_a postérieurs à a.

Le système R′ ayant toujours un attribut numérique plus petit que a, on trouvera toujours ce nombre par le procédé suivant : on constituera un premier couple d'éléments des suites R et S, en choisissant pour les accoupler l'un à l'autre le nombre qui suit b et le terme initial de la suite des nombres ; et, lorsqu'on aura constitué ce couple, on en constituera un autre, en associant l'un à l'autre chacun des nombres qui suivent immédiatement les éléments du couple précédent.

On continuera à constituer l'un après l'autre, des couples formés chacun par les nombres qui suivent immédiatement chacun des deux nombres du couple précédent.

On pourra ainsi faire succéder un couple à un autre, jusqu'à ce qu'on ait associé le dernier terme a de la suite R, à un terme de la suite des a premiers nombres, ou jusqu'à ce qu'on

ait associé le dernier terme de la suite des *a* premiers nombres, à un terme de la suite R.

On ne parviendra jamais, en continuant à former successivement des couples d'éléments des deux suites R et S_a, à introduire dans un même couple le dernier terme *a* de la suite S_a avec un terme *x* de la suite R, car ce couple constituerait avec les précédents, un système complet de correspondance entre tout ou partie du système R qui est un système partiel de S_a et le système S_a lui-même, ce qui est contraire aux propriétés des systèmes correspondants.

Puisqu'en associant successivement chacun des termes de la suite R à un terme de S_a, dans l'ordre où ils se succèdent, on ne parviendra jamais à associer un terme de R au dernier terme *a* de S_a et que R est fini, on parviendra toujours à associer successivement tous les termes de R à des termes de S_a qui précèdent *a*.

Le dernier terme de la suite R se trouvera ainsi associé à un nombre antérieur à *a*, qui sera le nombre cherché *d*.

On obtient donc toujours, par ce procédé d'association, un couple formé par le dernier terme *a* de la suite R, associé à un nombre antérieur à *a*.

Le couple (*a*, *d*) ainsi formé, et ceux qui le précèdent, constituent un système complet de correspondance entre les éléments de la suite R et les *d* premiers nombres. Le nombre *d* est donc, par définition, l'attribut numérique cherché des éléments de la suite R, c'est-à-dire du système constitué par les termes de la suite S_a postérieurs à *b*.

On voit que le procédé décrit nous donne toujours la différence *a* — *b* des deux nombres *a* et *b*, pourvu que *a* soit plus grand que *b*.

Accord des deux définitions de la différence de deux nombres. — La différence de deux nombres inégaux *a* et *b* peut être considérée comme l'attribut numérique d'un ensemble d'objets distincts, égal à la différence de deux autres

ensembles ayant respectivement pour attributs numériques les nombres a et b.

Les deux définitions ne désignent qu'un seul et même nombre, ainsi que cela résulte de la proposition suivante.

Théorème XVII. — La différence de deux ensembles inégaux A_a et B_b d'objets distincts, ayant respectivement pour attributs numériques les nombres a et b, a pour attribut numérique la différence des deux nombres a et b.

Démonstration. — Si les deux ensembles inégaux A_a et B_b sont liés par la relation

$$B_b < A_a,$$

il y a toujours un ensemble D tel que

$$B_b + D = A_a.$$

La somme $B_b + D$ des deux ensembles B_b et D a pour attribut numérique d'après le théorème XVI la somme $b + x$ des attributs respectifs de B_b et de D.

On a donc :

$$b + x = a$$

L'attribut numérique x de la différence $A_a - B_b$ est donc la différence $a - b$ des attributs numériques des ensembles A_a et B_b.

Remarque. — Si trois ensembles d'objets distincts A, B, D, sont liés par la relation

$$D = A - B$$

les attributs numériques a, b, d de A, B, C sont liés par l'égalité

$$d = a - b$$

et réciproquement, ce qui justifie partiellement l'habitude un peu excessive de remplacer invariablement dans les relations

algébriques, tous les ensembles numérables par leurs attributs numériques.

Propriétés de la différence de deux nombres. — Nous ne développerons ici aucune des propriétés de la différence de deux nombres qui a été traitée en Allemagne d'une façon complète par le professeur Kronecker, et qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

VI

PRODUIT ET QUOTIENT DE DEUX NOMBRES

L'addition et la soustraction ne sont pas les deux seules opérations auxquelles on se livre sur les nombres.

Les deux autres opérations dont on fait usage sont la *multiplication* et la *division*.

Multiplier un nombre m par un nombre n, c'est trouver la somme de n nombres égaux à m.

La somme de n nombres égaux à m s'appelle le *produit* de m par n, et on représente ce produit par l'expression algébrique m multiplié par n qui s'écrit :

$$m.\,n.$$

Diviser un nombre m par un nombre n c'est trouver un nombre x tel que

$$n.\,x = m.$$

Il convient d'observer immédiatement qu'il n'y a pas toujours de nombre x remplissant cette condition.

Dans le cas où l'on peut trouver un tel nombre x, il est dit le *quotient* de m par n et on le désigne par l'expression algébrique m divisé par n, qui s'écrit

$$m : n.$$

Quand deux nombres m et n sont tels que l'on puisse trouver un autre nombre x réalisant l'égalité

$$n.\,x = m.$$

on exprime ce fait en disant que m est *divisible* par n.

Le premier terme d'un produit de deux nombres s'appelle le *multiplicande*, le second s'appelle le *multiplicateur*.

Le premier terme d'un quotient est le *dividende*, le second est le *diviseur*.

Propriété distributive de la multiplication. — Pour multiplier une somme par un nombre, on peut multiplier les parties de cette somme par le multiplicateur et ajouter les produits partiels c'est-à-dire que l'on a toujours l'égalité.

$$(a+b)n = a.n + b.n,$$

quels que soient les nombres désignés par a, b, n.

Démonstration. — Le produit $(a + b)\ n$ est par définition la somme de n nombres égaux à $(a + b)$.

Or la somme des nombres

$$(a+b)+(a+b)+\dots\dots+(a+b) \qquad (1)$$

formée par les n termes $(a + b)$ est associative et commutative, c'est-à-dire qu'on peut énoncer les nombres qui la constituent dans tel autre ordre qui nous conviendra, et associer les termes successifs comme nous voudrons sans changer le nombre défini par la première somme.

On pourra donc choisir successivement dans chacun des n termes $(a + b)$ de (1) un nombre a.

On aura ainsi n nombres égaux à a, que l'on pourra ajouter les uns aux autres, de façon à former une seule somme que nous pourrons désigner par $a.\ n$.

On pourra de même choisir successivement tous les termes b de (1), de façon à former ainsi une suite $b.\ n$.

La somme

$$a.n + b.n \qquad (2)$$

formée par ces deux suites partielles comprendra tous les nombres de la somme (1) désignée par le produit

$$(a+b)\,n. \qquad (3)$$

Les expressions algébriques (2) et (3) désigneront donc le même nombre, c'est-à-dire que l'on a l'égalité

$$(a+b)\,n = a.\,n + b.\,n;$$

ce qu'il fallait établir.

La même démonstration s'étendrait sans difficulté au produit d'une somme quelconque de nombres $(a + b + .. + c)$ par un nombre n.

COMMUTATIVITÉ DES TERMES DU PRODUIT. — Dans un produit de deux facteurs, on peut intervertir l'ordre des facteurs, c'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$a.\,b = b.\,a,$$

quels que soient les nombres désignés par a et b.

Cette proposition est une conséquence du théorème précédent ; en effet, le nombre a est la somme de a nombres égaux au terme initial 1 de la suite des nombres.

On a donc l'égalité

$$a = 1 + 1 + .. + 1;$$

il en résulte les égalités

$$a.\,b = (1 + 1 + ..\,1)\,b = (b + b + .. + b) = b.\,a.$$

dans lesquelles $1 + 1.. + 1$ et $b + b + ... + b$ désignent des sommes de a termes.

SECOND THÉORÈME DE L'ASSOCIATIVITÉ. — Pour multiplier un nombre par une somme, on peut multiplier ce nombre par les parties de cette somme, et ajouter les produits partiels, c'est-à-dire qu'on a toujours l'égalité

$$n\,(a + b) = n.\,a + n.\,b.$$

Ce théorème résulte directement des deux précédents. On peut d'ailleurs le démontrer directement comme nous avons fait pour le premier.

Nous ne développerons pas les autres propriétés du produit de plusieurs nombres. Il suffit pour les connaître de consulter nos traités d'arithmétique, et en particulier celui de M. Jules Tannery, qui me paraît l'exposé le mieux fait des théories classiques de l'arithmétique.

Pour démontrer ces propriétés du produit, il suffira d'adapter aux nouvelles définitions, les démonstrations de ces ouvrages qui s'appliquent à peu près textuellement avec la nouvelle conception du produit.

Univocité, associativité, commutativité et distributivité du produit. — Il résulte de ces démonstrations basées uniquement sur les dix-huit principes tirés de l'observation psychologique, que le produit de plusieurs nombres est univoque, associatif, commutatif et distributif.

Nous ne développerons pas les propriétés de la division de deux nombres que l'on trouvera dans les ouvrages cités plus haut.

Nous remarquerons seulement que le quotient q de a par b défini par l'égalité.

$$b.q=a$$

est univoque, c'est-à-dire que la division d'un nombre par un autre est une opération qui donne toujours le même nombre.

VII

PRODUIT ET QUOTIENT D'UNE GRANDEUR PAR UN NOMBRE

Nous avons montré comment on peut établir directement les propriétés du produit ou du quotient de deux nombres, sans se servir d'aucune des notions du monde extérieur.

Cette manière de commencer l'établissement des propriétés du produit et du quotient par le résultat de ces opérations restreintes aux nombres, comme si elles ne devaient s'appli-

quer qu'à ce seul système de grandeurs, a l'avantage de ne pas rompre avec une ancienne tradition pédagogique.

Elle a aussi l'intérêt psychologique de sérier les démonstrations déduites uniquement de l'observation psychologique, des autres démonstrations basées sur des conceptions tirées de l'observation du monde extérieur.

Nous allons donner la définition générale du produit ou du quotient d'une grandeur quelconque par un nombre entier, et nous établirons les propriétés élémentaires des résultats de la multiplication et de la division.

Définition générale du produit d'une grandeur par un nombre. — On appelle produit d'une grandeur A par un nombre entier n et on représente par A. n ou par n. A la somme de n grandeurs égales à A.

Propriétés du produit. — De la définition précédente résultent immédiatement les conséquences suivantes :

1° Si

$$A = B, \qquad A.n = B.n$$

et si

$$A < B, \qquad A.n < B.n$$

et réciproquement ;

2°

$$(A + B).n = A.n + B.n$$

Le produit (A + B). n est par définition la somme de n grandeurs égales à A + B.

Or la somme

$$(A + B) + (A + B) + \dots + (A + B) \qquad (1)$$

constituée par n termes (A + B) est associative et commutative. On peut donc choisir successivement dans chacun de ces n termes égaux une grandeur A. On aura ainsi n grandeurs A que l'on ajoutera les unes aux autres de façon à former la somme désignée par A. n.

On formera de même par association de tous les termes B

de la somme (1), une somme que l'on peut désigner par B. n.

La somme

$$A.n + B.n \tag{2}$$

formée par l'addition de toutes les grandeurs de la somme (1) désignera la même grandeur que

$$(A + B)n \tag{3}$$

formée aussi par l'addition de toutes les grandeurs de (1).

Les expressions algébriques (2) et (3) qui désignent l'une et l'autre des grandeurs égales entre elles, sont liées par l'égalité.

$$(A + B).n = A.n + B.n;$$

ce qu'il fallait démontrer;

3° m et n étant des nombres entiers quelconques on a

$$A.(m+n) = A.m + A.n \tag{1}$$

$$(A.m).n = A.(m.n) = (A.n).m \tag{2}$$

En effet le second membre de l'égalité (1) est par définition une somme de m grandeurs égales à A suivie d'une somme de n grandeurs égales à A. L'addition des deux sommes de m et n termes est une somme de termes constituée par tous les éléments du système total des m et des n termes des deux premières sommes. C'est donc, d'après le théorème XVI, une somme de $(m + n)$ termes égaux à A. Le premier membre de l'égalité (1) étant par définition une somme de $(m + n)$ termes égaux à A, il en résulte que les deux membres de (1) sont égaux.

Dans les égalités (2) le produit $m.\ n$ désigne la somme de n nombres égaux à m.

Le produit d'une grandeur A par une somme de nombres étant égal, d'après l'égalité (1), à la somme des produits de A par chacun des nombres de la somme, il en résulte que le produit de A par $(m.\ n)$ sera égal à la somme des produits

de A par chacun des n nombres égaux à m, c'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$A.(m.n) = A.m + A.m + \ldots + A.m$$

dans laquelle le second membre est constitué par n produits égaux à A. m. Cette somme de n termes égaux à la grandeur A. m peut s'écrire

$$(A.m).n.$$

en sorte que l'on a l'égalité

$$A.(m.n) = (A.m).n. \qquad (3)$$

Le nombre $(m.\ n)$ étant égal au nombre $(n.\ m)$ il en résulte que l'on a

$$A.(m.n) = A.(n.m) = (A.n).m,$$

et par suite

$$A.(m.n) = (A.n).m. \qquad (4)$$

Les égalités (3) et (4) démontrent l'exactitude des égalités (2).

Définition du quotient d'une grandeur par un nombre. — Si étant donnés une grandeur quelconque A d'un système déterminé, et un nombre entier quelconque n, on peut trouver une autre grandeur X du même système, telle que

$$X.n = A, \qquad (1)$$

il en résulte que si une autre grandeur X′ est telle que

$$X'.n = A,$$

on a

$$X.n = X'n,$$

qui entraîne

$$X = X'.$$

Donc toutes les grandeurs X qui vérifient l'équation sont égales entre elles. L'une quelconque de ces grande

s'appelle le quotient de A par n et se représente par l'expression algébrique

$$A : n.$$

Nous avons déjà vu que le système de grandeurs constitué par les nombres n'admet pas toujours de quotient entre un nombre et un autre.

L'étude des systèmes de grandeurs définis par l'égalité et l'addition de leurs éléments, nous montrera que les fractions ou nombres fractionnaires sont toujours divisibles par un nombre quelconque entier ou fractionnaire, c'est-à-dire qu'étant données deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$ on peut toujours trouver une fraction $\frac{x}{y}$ telle que

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{x}{y} = \frac{p}{q}.$$

On verra aussi que la définition du quotient nous permettra toujours de trouver un segment de droite X qui soit le quotient de tout segment donné par un nombre entier ou fractionnaire quelconque.

Extension des définitions du produit et du quotient. — La définition du produit et du quotient peut s'étendre dans certains systèmes de grandeurs à des opérations univoques d'une grandeur par une autre grandeur de même espèce ; mais le quotient d'une grandeur A par une grandeur B est toujours une grandeur X telle que

$$X . B = A.$$

Dans tous les cas où il existe un quotient A : B on a par définition

$$(A : B) . B = A$$

ce qui s'exprime ainsi.

Théorème XVIII. — Une grandeur ne change pas quand on la divise et qu'on la multiplie successivement par une même grandeur.

VIII

OBSERVATIONS GÉNÉRALES SUR LES THÉORIES DE L'ARITHMÉTIQUE

Nous remarquerons tout d'abord que nous n'avons développé jusqu'ici aucune méthode particulière de formation d'une suite de nombres. tandis que l'exposé du procédé d'établissement de la suite des nombres de notre langue tient une des premières places au début de tous les traités d'arithmétique.

En effet, il n'y avait pas lieu de décrire des modes de formation particulière à telle ou telle suite, quand les propriétés du nombre que nous décrivions s'appliquaient indistinctement à toute suite de nombres.

Nous ne décrirons pas ici les différentes suites qui ont servi à compter depuis les temps historiques, en commençant par le sanscrit. et en continuant par le grec et le latin, pour aboutir à notre système illimité de *numération écrite.* Cette étude a plutôt un caractère philologique et linguistique qui nous entraînerait dans une voie trop longue et un peu étrangère à notre sujet. D'ailleurs le traité d'arithmétique de M. Jules Tannery décrit avec une grande abondance de détails le mode d'établissement de notre suite française et du système général de numération illimitée. D'autres ouvrages exposent les origines étymologiques des nombres usuels tirés du sanscrit avec leur passage par les langues grecque et latine.

J'ai rempli mon programme, qui était d'établir la base psychologique sur laquelle on peut faire reposer l'idée de nombre et la théorie des opérations élémentaires sur le nombre.

J'ai montré en outre que la notion d'égalité, de somme, de produit et de quotient ne s'applique pas seulement au nombre, mais peut être étendue à tout système de grandeurs ; qu'en

un mot les opérations élémentaires de l'arithmétique s'appliquent à tout système de phénomènes, d'objets réels ou fictifs, ou d'êtres, pourvu que l'égalité et la somme de leurs éléments soient définies de façon à remplir certaines conditions déterminées, qui s'imposent pour pouvoir exprimer les propriétés de tout système à l'aide du langage mathématique.

Les opérations algébriques s'étendent en particulier au système des segments de droites et surtout aux rapports des segments de droites.

Elles constituent le *calcul géométrique* si magistralement exposé par M. Hilbert, professeur à l'Université de Göttingue.

Ce calcul constitue une extension considérable du système imaginé par Descartes et borné uniquement aux relations algébriques entre les nombres qui mesurent les segments de droites d'une figure géométrique.

Il y aurait lieu de continuer le travail que je viens de faire sur les propriétés élémentaires des nombres et sur les systèmes de grandeurs, par une étude du calcul universel pour montrer que les règles de l'algèbre s'appliquent sans restriction à tous les systèmes de grandeurs qu'il nous plaira de former, pourvu qu'ils jouissent des propriétés fondamentales nécessaires pour constituer un système régi par les opérations de l'arithmétique. Il faudrait commencer par établir d'abord le système constitué par toute suite de deux nombres qu'on appelle une fraction, en montrant que le système ainsi constitué est bien un système de grandeurs algébriques, système admirablement imaginé par M. Meray, professeur à la Faculté de Dijon, et mis partiellement en pratique par M. Jules Tannery dans son arithmétique.

Je n'insisterai pas sur le système des segments de droites et surtout le système des rapports de segments de droites, qui constitue un système rattaché à toutes les opérations de l'algèbre imaginé par le professeur Hilbert.

Un tel ouvrage relierait les théories de ces grands novateurs en un seul corps de doctrine qui n'existe pas, du moins

à ma connaissance; et rendrait un très grand service à l'étude d'un classement rationnel des mathématiques, aujourd'hui si misérablement éparses dans un dédale d'axiomes et de principes tirés de l'expérience, sans qu'il soit possible de reconnaître l'origine de ces vérités d'observation et le lien qui les rattache entre elles.

